

Глава 1

Весовые пространства

1.1. Весовые пространства в углах и \mathbb{R}^n

Пространства $H_a^k(\Omega)$

Вначале мы рассмотрим плоский случай. Обозначим через

$$\theta = \{y \in \mathbb{R}^2 : d_1 < \varphi < d_2, 0 < r\}$$

плоский угол, где r, φ — полярные координаты точки y , $0 < d_2 - d_1 < 2\pi$. Предположим, что $\Omega = \theta$ или \mathbb{R}^2 .

Определение 1.1.1. Введем весовое пространство Кондратьева $H_a^k(\Omega)$ как пополнение множества $C_0^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$ по норме

$$\|u\|_{H_a^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} r^{2(a-k+|\alpha|)} |D^\alpha u(y)|^2 dy \right)^{1/2}, \quad (1.1.1)$$

где $C_0^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$ — множество бесконечно дифференцируемых функций в $\overline{\Omega}$ с компактными носителями в $\overline{\Omega} \setminus \{0\}$, $k \geq 0$ — целое, $a \in \mathbb{R}$.

Для того чтобы ввести эквивалентную норму в пространстве $H_a^k(\Omega)$, мы перейдем к полярным координатам r, φ и сделаем замену переменной $\tau = \ln r$. Тогда угол θ и множество $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ отобразятся в полосы

$$G = \{y' = (\varphi, \tau) : d_1 < \varphi < d_2, -\infty < \tau < +\infty\}$$

и

$$G = \{y' = (\varphi, \tau) : 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < \tau < +\infty\}$$

соответственно. Функцию $u(y)$ в новой системе координат обозначим через $u(y')$. По индукции легко доказать следующие равенства

$$D_y^\alpha = e^{-|\alpha|\tau} \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} a_\beta(\varphi) D_{y'}^\beta, \quad (1.1.2)$$