Содержание

1 Принцип сжимающих отображений

Ряд вопросов, связанных с существованием и единственностью решений уравнений того или иного типа (например, дифференциальных уравнений), можно сформулировать в виде вопроса о существовании и единственности неподвижной точки при некотором отображении соответствующего метрического пространства в себя. Среди различных критериев существования и единственности неподвижной точки при такого рода отображениях один из простейших и в то же время наиболее важный – *принцип сжимающих отображений*.

Пусть R - метрическое пространство. Отображение A пространства R в себя называется *сжимающим отображением*, или, короче, *сжатием*, если существует такое число $\alpha < 1$ что для любых двух точек $x, y \in R$ выполняется неравенство:

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha\rho(x, y)$$

Всякое сжимающее отображение непрерывно. Действительно, если $x_n \to x$, то в силу неравенства и $Ax_n \to Ax$

Точка x называется *неподвижной точкой* отображения A, если $Ax = x$. Иначе говоря, неподвижные точки – решения уравнения $Ax = x$.

Теорема (Пикара-Банаха)
(принцип сжимающих отображений)

Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве R, имеет одну и только одну неподвижную точку.

Принцип сжимающих отображений можно применять к доказательству существования и единственности решений для уравнений различных типов (дифференциальных, интегральных, алгебраических, трансцендентных, СЛАУ). Помимо доказательства существования и единственности решения уравнения $Ax = x$, принцип сжимающих отображений дает и фактический метод приближенного нахождения этого решения (*метод последовательных приближений*). Также рассматриваемый принцип находит большое применение при построении итерационных процессов.

2 Применения принципа сжимающих отображений для решения линейных интегральных уравнений 2-го рода

2.1 Уравнения Фредгольма

Линейным интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода называется уравнение вида:

$$\phi(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\phi(x)dt = f(x)$$

где $\phi(x)$ – неизвестная функция, $K(x,t)$ и $f(x)$ – известные функции, x и t – действительные переменные, изменяющиеся в интервале (a,b), λ – численный множитель.

Функция $K(x,t)$ называется *ядром интегрального уравнения;* предполагается что ядро определено в квадрате $\Omega\ \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ на плоскости (x,t) и непрерывно в Ω, либо его разрывы таковы, что двойной интеграл:

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b |K(x,t)|^2 dxdt$$

имеет конечное значение.

Если $f(x) \neq 0$, то уравнение называется *неоднородным*; если же $f(x) \equiv 0$, то уравнение принимает вид:

$$\phi(x) - \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\phi(x)dt = 0$$

и называется *однородным.*

Заметим, что пределы интегрирования a и b могут быть как конечными так и бесконечными.

Решением интегральных уравнений этого типа называется любая функция $\phi(x)$, при подстановке которой в уравнение последнее обращается в тождество относительно $x \in (a,b)$

Для решения этого интегрального уравнения применяется метод последовательных приближений.

Предположим, что $K(x,t)$ и $\phi(x)$ непрерывны при $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$ и, следовательно, $|K(x,t)| \leq M$. Рассмотрим отображение $g = Af$ полного пространства $C[a,b]$ в себя, задаваемое формулой:

$$g(x) = \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\phi(x)dt + f(x)$$

Имеем

$$\rho(g_1, g_2) = \max|g_1(x) - g_2(x)| \leq |\lambda|M(b-a)max|f_1(x) - f_2(x)|$$

Следовательно, при $\lambda < \frac{1}{M(b-a)}$ уравнение Фредгольма имеет единственное непрерывное решение.

При выполнении этого условия строим последовательность функций $\{\phi_n(x)\}$ с помощью рекурентной формулы:

$$\phi_n(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,t)\phi_{n-1}(t)dt$$

Функции $\phi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ рассматриваются как приближения к искомому решению уравнения, причем нулевое приближение $\phi_0(x)$ может быть выбрано произвольно.

Величина погрешности $(m+1)$ приближения определяется неравенством:

$$|\phi(x) - phi_{m+1}(x)| \leq F \cdot C_1 \cdot B^{-1} \cdot \frac{|\lambda B|^{m+1}}{1 - |\lambda B|} + \Phi C_1 B^{-1} |\lambda B|^{m+1}$$

где

$$F = \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x) dx}$$

$$\Phi = \sqrt{\int\limits_a^b \phi_0^2(x) dx}$$

$$C_1 = \sqrt{\max_{a \leq x \leq b} \int\limits_a^b K^2(x,t) dt}$$

2.2 Уравнения Вольтерра

Уравнение

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^x K(x,t)\phi(t) dt,$$

где $f(x)$, $K(x,t)$ – известные функции, $\phi(x)$ – искомая функция, λ – числовой параметр, называется *линейным интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода*. Функция $K(x,t)$ называется *ядром уравнения Вольтерра*. Если $f(x) \equiv 0$ то уравнение принимает вид

$$\int\limits_a^x K(x,t)\phi(x) dt = f(x),$$

где $\phi(x)$ – искомая функция, и его называют *интегральным уравнением 1-го рода*. Не нарушая общности, можем считать нижний предел a равным нулю, что мы и будем предполагать в дальнейшем.

Решением этого интегрального уравнения называют функцию $\phi(x)$, которая, будучи подставлена в это уравнение, обращает его в тождество (по x).

Здесь, в отличие от уравнений Фредгольма, верхний предел в интеграле – переменная величина x. Формально это уравнение можно рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма, допределив функцию K равенством: $K(x,y) = 0$ при $y > x$

Однако в случае интегрального уравнения Фредгольма мы были вынуждены ограничиться малыми значениями параметра λ, а к уравнениям Вольтерра принцип сжимающих отображений (и метод
последовательных приближений) применим при всех значениях λ. Точнее речь идет о следующем обобщении принципа сжимающих отображений:

Пусть A – такое непрерывное отображение полного метрического пространства R в себя, что некоторая его степень $B = A^n$ является сжатием; тогда уравнение

$$Ax = x$$

имеет одно и только одно решение

Будем предполагать что $f(x)$ непрерывна в $[0, a]$, а ядро $K(x, t)$ непрерывно при $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq x$.

Возьмем какую-либо непрерывную в $[0, a]$ функцию $\phi_0(x)$. Подставляя в правую часть уравнения Вольтерра вместо $\phi(x)$ функцию $\phi_0(x)$, получаем:

$$\phi_1(x) = f(x) - \lambda \int\limits_0^x K(x, t)\phi_0(t)dt$$

Определенная таким образом функция $\phi_1(x)$ также непрерывна на отрезке $[0, a]$. Продолжая этот процесс, получим последовательность функций:

$$\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \ldots, \phi_n(x), \ldots$$

где

$$\phi_n(x) = f(x) + \lambda \int\limits_0^x K(x, t)\phi_{n-1}(t)dt$$

При сделанных предположениях относительно $f(x)$ и $K(x, t)$ последовательность $\{\phi_n(x)\}$ сходится при $n \to \infty$ к решению $\phi(x)$ интегрального уравнения.

Удачный выбор нулевого приближения пожет привести к быстрой сходимости последовательности $\{\phi_n(x)\}$ к решению интегрального уравнения.

3 Примеры решения

3.1 Уравнение Фредгольма

Решить методом последовательных приближений интегральное уравнение Фредгольма второго рода с точностью $\epsilon < 0,1$:

$$\phi(x) - \frac{1}{50}\int\limits_0^{\pi} (x^2+t)\cos t\phi(x)dt = \sin x$$

Решение

Проверим сжимаемость оператора. Условие сжимаемости: $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, где

$$M = \max_{x,t} |K(x,t)|$$

Учтем, что $|K(x,t)| = |(x^2+t)\cos t|$, тогда

$$M = \max_{x,t} |(x^2+t)\cos t|$$

Очевидно, что функция $cost$ будут иметь наибольшее значение при $t=0$. Так как функция рассматривается на отрезке $[0,\pi]$, то максимум будет достигаться при $x=\pi$. Таким образом

$$M = \pi^2$$

$$\frac{1}{M(b-a)} = \frac{1}{\pi^2(\pi-0)} = \frac{1}{\pi^3} \approx 0,033225 < \frac{1}{50} = 0,02$$

Так как указанное выше условие выполняется, данное уравнение можно решать методом последовательных приближений. Зададимся нулевым приближением $\phi_0(x) = 0$

$$\phi_1(x) = \sin x + \frac{1}{50}\int\limits_0^{\pi} 0dt = \sin x$$

$$\rho\left(\phi_1(x), \phi_0(x)\right) = \max_{[0,\pi]} |\phi_1(x) - \phi_0(x)| = \sin x = 1$$

Так как $\rho\left(\phi_1(x), \phi_0(x)\right) > \epsilon$ продолжаем итерации.

$$\phi_2(x) = \sin x + \frac{1}{50}\int\limits_0^{\pi} (x^2+t)\cos t\sin tdt = \sin x + \frac{1}{100}\int\limits_0^{\pi}(x^2+t)\sin 2tdt =$$

$$= \sin x + \frac{1}{100}\left(\int\limits_0^{\pi} x^2\sin 2tdt + \underbrace{\int\limits_0^{\pi} t\sin 2tdt}_{I_1}\right)$$

$$I_1 = \int\limits_0^{\pi} t\sin 2tdt = \left| \begin{array}{l} U = t, du = dt \\ dV = \sin 2tdt \\ V = -\frac{1}{2}\cos 2t \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\cos 2t\cdot t\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\cos 2tdt = -\frac{\pi}{2}$$

$$\phi_2(x) = \sin x + \frac{1}{100}\left(-x^2\frac{1}{2}\cos 2t\Big|_0^{\pi} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x - \frac{\pi}{200}$$

Найдем расстояние:

$$\rho\left(\phi_2(x), \phi_1(x)\right) = \max_{[0,\pi]} |\phi_2(x) - \phi_1(x)| = \frac{\pi}{200} \approx 0,015 < \epsilon$$

Ответ: $\phi(x) = \sin x - \frac{\pi}{200}$

3.2 Уравнение Вольтерра

Решить методом последовательных приближений интегральное уравнение Вольтерра второго рода.
Интервал $[0, 1]$, с точностью $\epsilon = 0, 1$:

$$\phi(x) = 1 - \int\limits_0^x cosh(x-t)\phi(t)dt$$

Решение

Зададимся нулевым приближением $\phi_0 = 1$, тогда

$$\phi_1(x) = 1 - \int\limits_0^x \cosh{(x-t)}dt = 1 + \sinh{(x-t)}|_0^x = 1 - \sinh x$$

$$\rho\left(\phi_1(x), \phi_0(x)\right) = \max_{[0,1]} |\phi_1(x) - \phi_0(x)| = \max_{[0,1]} |\sinh x| \approx 1,17520 > \epsilon$$

Тогда продолжаем итерации

$$\phi_2(x) = 1 - \underbrace{\int\limits_0^x \cosh{(x-t)}(1 - \sinh t)dt}_{I_1}$$

$$I_1 = \int\limits_0^x \cosh{(x-t)}dt - \int\limits_0^x \sinh t \cdot \cosh{(x-t)}dt =$$

$$= - \sinh{(x-t)}|_0^x - \int\limits_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^{x-t} - e^{-x+t}}{2} dt = \sinh x - \frac{1}{2}\int\limits_0^x \left(\sinh x + \sinh{(2t-x)}\right)dt =$$

$$= \sinh x - \frac{1}{2}\sinh x \cdot t\Big|_0^x - \frac{1}{4}\cosh{(2t-x)}\Big|_0^x = \sinh x - \frac{1}{2}x\sinh(x)$$

$$\phi_2(x) = 1 - \sinh x - \frac{1}{2}x\sinh(x)$$

Найдем расстояние:

$$\rho\left(\phi_2(x), \phi_1(x)\right) = \max_{[0,1]} |\phi_2(x) - \phi_1(x)| = \max_{[0,1]} \left|\frac{1}{2} \cdot x\sinh x\right| \approx 0,5876 > \epsilon$$

Следовательно, продолжаем итерации:

$$\phi_3(x) = 1 - \int\limits_0^x \left(\cosh{(x-t)}(1 - \sinh t + \frac{1}{2}t\sinh t)\right)dt =$$

$$= 1 - \int\limits_0^x \cosh{(x-t)}dt + \int\limits_0^x \cosh{(x-t)} \cdot \sinh t dt - \frac{1}{2}\int\limits_0^x cosh(x-t) \cdot t \cdot sinhtdt$$

Пользуясь результатами предыдущих итераций будем иметь:

$$\phi_3(x) = 1 - \sinh x + \frac{1}{2} \cdot x \sinh x - \underbrace{\frac{1}{2} \int\limits_0^x cosh(x-t) \cdot t \cdot sinhtdt}_{I_2}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int\limits_0^x cosh(x-t) \cdot t \cdot sinhtdt = \frac{1}{4} \int\limits_0^x t \cdot \sinh x dt + \underbrace{\frac{1}{4} \int\limits_0^x t \sinh{(2t-x)} dt}_{I_3} =$$

$$= \frac{1}{8} t^2 \sinh x \Big|_0^x + I_3 = \frac{1}{8} x^2 \sinh x + I_3$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \int\limits_0^x cosh(x-t) \cdot t \cdot sinhtdt = \begin{vmatrix} U = t, du = dt \\ V = \frac{1}{2} \sinh{(2t-x)} dt \\ dV = \sinh{(2t-x)} dt \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} t \cdot \cosh{(2t-x)} \Big|_0^x - \frac{1}{4} \sinh{(2t-x)} \Big|_0^x \right)$$

$$= \frac{1}{8} x \cosh x - \frac{1}{8} \sinh x$$

Возвращаясь к подстановке

$$I_2 = \frac{1}{8} x^2 \sinh x + \frac{1}{8} x \cosh x - \frac{1}{8} \sinh x$$

$$\phi_3(x) = 1 - \sinh x + \frac{1}{2} \cdot x \sinh x - \frac{1}{8} x^2 \sinh x - \frac{1}{8} x \cosh x + \frac{1}{8} \sinh x$$

Найдем расстояние:

$$\rho\left(\phi_3(x), \phi_2(x)\right) = \max_{[0,1]} |\phi_3(x) - \phi_2(x)| = \max_{[0,1]} \left| -\frac{1}{8} x^2 \sinh x - \frac{1}{8} x \cosh x + \frac{1}{8} \sinh x \right| \approx 0,192885 > \epsilon$$

Продолжаем итерации

$$\phi_4(x) = 1 - \int\limits_0^x \cosh{(x-t)} \cdot \left(1 - \sinh x + \frac{1}{2} t \sinh t - \frac{1}{8} t^2 \sinh t - \frac{1}{8} t \cosh t + \frac{1}{8} sinht \right) dt =$$

Воспользовавшись результатами предыдущих итераций, будем иметь:

$$\phi_4(x) = 1 - \sinh x + \frac{1}{2} \cdot x \sinh x - \frac{1}{8} x^2 \sinh x - \frac{1}{8} x \cosh x + \frac{1}{8} \sinh x + \underbrace{\int\limits_0^x cosh(x-t) \left(\frac{1}{8} t^2 \sinh t + \frac{1}{8} t \cosh t - \frac{1}{8} si\ldots \right.}_{I_4}$$

$$I_4 = \underbrace{\int\limits_0^x \cosh{(x-t)} \frac{1}{8} t^2 \sinh t dt}_{I_5} + \underbrace{\int\limits_0^x \cosh{(x-t)} \frac{1}{8} t \cosh t dt}_{I_6} - \underbrace{\int\limits_0^x \cosh{(x-t)} \frac{1}{8} sinhtdt}_{I_7}$$

Возьмем интеграл I_5:

$$I_5 = \frac{x^3}{48} \sinh x + \frac{1}{16} \underbrace{\int\limits_0^x t^2 \sinh{(2t-x)} dt}_{I_8}$$

$$I_8 = \int\limits_0^x t^2 \sinh(2t-x)dt = \left| \begin{array}{l} U = t^2, du = 2tdt \\ dV = \sinh(2t-x)dt \\ V = \frac{1}{2}\cosh(2t-x) \end{array} \right| = \frac{1}{2} t^2 \cosh(2t-x)\Big|_0^x - \int\limits_0^x t\cosh(2t-x)dt =$$

$$= \frac{x^2}{2}\cosh x - \int\limits_0^x t\cosh(2t-x)dt = \left| \begin{array}{l} U = t, du = dt \\ dV = \cosh(2t-x)dt \\ V = \frac{1}{2}\sinh(2t-x) \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\cosh x - \Bigg(\frac{1}{2} t\sinh(2t-x)\Big|_0^x - \frac{1}{2}\int\limits_0^x \sinh(2$$

$$= \frac{x^2}{2}\cosh x - \frac{1}{2} x\sinh x$$

После взятия интеграла I_8 по частям:

$$I_5 = \frac{x^3}{48}\sinh x + \frac{1}{16}\left(\frac{x^2}{2} coshx - \frac{1}{2} x\sinh x \right)$$

Возьмем интеграл I_6:

$$I_6 = \frac{x^2}{32}\cosh x + \frac{1}{16} \underbrace{\int\limits_0^x t\cosh(2t-x)dt}_{I_9}$$

$$I_9 = \int\limits_0^x t\cosh(2t-x)dt = \left| \begin{array}{l} U = t, du = dt \\ dV = \cosh(2t-x)dt \\ V = \frac{1}{2}\sinh(2t-x) \end{array} \right| = \frac{1}{2} t\sinh(2t-x)\Big|_0^x - \frac{1}{2}\int\limits_0^x \sinh(2t-x)dt = \frac{1}{2} x\sinh x$$

После взятия интеграла I_9 по частям:

$$I_6 = \frac{x^2}{32}\cosh x + \frac{1}{32} x\sinh x$$

Возьмем интеграл I_7:

$$I_7 = \frac{1}{8}\int\limits_0^x \cosh(x-t)\sinh t dt = \frac{1}{16} x\sinh x$$

Возвращаясь к подстановке I_4, получим:

$$I_4 = \frac{x^3}{48}\sinh x + \frac{x^2}{16}\cosh x - \frac{1}{16} x\sinh x$$

Тогда

$$\phi_4(x) = 1 - \sinh x + \frac{1}{2} x\sinh x - \frac{1}{8} x^2 \sinh x - \frac{1}{8} x\cosh x + \frac{1}{8}\sinh x + \frac{x^3}{48}\sinh x + \frac{x^2}{16}\cosh x - \frac{1}{16} x\sinh x =$$

$$= 1 - \frac{7}{8}\sinh x + \frac{7}{16} x\sinh x - \frac{1}{8} x^2\sinh x - \frac{1}{8} x\cosh x + \frac{x^3}{48}\sinh x + \frac{x^2}{16}\cosh x$$

Найдем расстояние:

$$\rho(\phi_4(x), \phi_3(x)) = \max_{[0,1]} |\phi_4(x) - \phi_3(x)| = \max_{[0,1]} \left| \frac{x^3}{48}\sinh x + \frac{x^2}{16}\cosh x - \frac{1}{16} x\sinh x \right| \approx 0,0474755 < \epsilon$$

Ответ: $\phi(x) = 1 - \sinh x + \frac{1}{2} x\sinh x - \frac{1}{8} x^2\sinh x - \frac{1}{8} x\cosh x + \frac{1}{8}\sinh x + \frac{x^3}{48}\sinh x + \frac{x^2}{16}\cosh x - \frac{1}{16} x\sinh x$

4 Литература

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа - 6е изд. испр - М.: Наука 1989 - 624 с.

2. Ефимов, Золотарев, Терпигорова Математический анализ. Специальные разделы, т.2

3. Фильштинский Л. А. Функциональный анализ, метод. указания