$$\varphi_n(t) = A^{-1}(t)\int\limits_t^{t_{n+1}} J_\delta^{-1}(\tau)e^{-c\tau}u(\tau)d\tau,$$

где интегральные сглаживающие операторы

$$J_\delta^{-1}(t) = \left(I - \delta\left(d/dt\right)\right)^{-1}, \delta > 0, D\left(J_\delta\right) = \left\{v \in H_n : dv/dt \in H_n, v(t_{n+1}) = 0\right\},\ H_n = L_2(I_n, H).$$

Сначала в тождестве (6) полагаем

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t), & t \in I_1, \\ 0, & t \notin I_1, \end{cases}$$

и приходим к равенству

$$\int\limits_0^T \left(u, \frac{d^2\varphi}{dt^2} + A(t)\varphi\right)dt = \int\limits_{I_1} \left(u, \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + A(t)\varphi_1\right) = 0,$$

из которого рассуждениями и преобразованиями работы [6] с помощью неравенства (3) со знаком плюс в его левой части и неравенства (4) выводим, что $u = 0$ при п. в. $t \in I_1$.

Теперь допустим, что доказано равенство $u = 0$ при п. в. $t \in \bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k$, и докажем, что $u = 0$ при п. в. $t \in \bigcup\limits_{k=1}^{n+1} I_k$, $F\ n+1 \le K$. В тождестве (6) полагаем

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \in \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} I_k, \\ \theta_n(t)\psi_n(t), & t \in I_n, \\ \varphi_{n+1}(t), & t \in I_{n+1}, \quad n+1 \le K, \\ 0, & t \ge t_{n+2}, \quad n \le K-2, \end{cases} \tag{7}$$

где ψ_n – слабые решения задач Коши с обратным течением времени:

$$\frac{d^2\psi_n(t)}{dt^2} + A(t)\psi_n(t) = 0, \quad t \in I_n, \tag{8}$$

$$\psi_n\left(t_{n+1}\right) = \varphi_{n+1}\left(t_{n+1}\right), \quad \frac{d\psi_n\left(t_{n+1}\right)}{dt} = \frac{d\varphi_{n+1}\left(t_{n+1}\right)}{dt}, \tag{9}$$

и срезающие функции $\theta_n(t) \in C^\infty[0,T]$ такие, что $\theta_n(t) = 0, \quad t \le t_n$, и $\theta_n(t) = 1, \quad t \ge t_{n+1}$. Если доказать существование функций ψ_n, удовлетворяющих уравнению (8) при п. в. $t \in I_n$ и условиям (9) в обычном смысле, то по построению функция φ вида (7) будет принадлежать множеству Φ. Заменой переменной $s = t_{n+1} - t$ задача Коши (8), (9) сводится к задаче Коши с прямым течением времени:

$$\frac{d^2\tilde{\psi}_n(s)}{ds^2} + A(s)\tilde{\psi}_n(s) = 0, \quad s \in]0, t_{n+1} - t_n[, \tag{10}$$

$$\tilde{\psi}_n(0) = \varphi_{n+1}\left(t_{n+1}\right), \quad \frac{d\tilde{\psi}_n(0)}{dt} = \frac{d\varphi_{n+1}\left(t_{n+1}\right)}{dt}, \tag{11}$$

относительно функций $\tilde{\psi}_n(s) = \psi_n\left(t_{n+1} - s\right)$. В предположениях условий I–III, причем неравенства (3) с минусом в его левой части, операторы $\tilde{A}(s) = A(t_{n+1} - s)$ удовлетворяют на интервале $[0, t_{n+1} - t_n[$ всем требованиям теоремы 4 гладкости из [2], так как согласно условию III б) начальные данные

$$\varphi_{n+1}\left(t_{n+1}\right) \in D\left(A\left(t_{n+1} - 0\right)\right), \ \frac{d\varphi_{n+1}\left(t_{n+1}\right)}{dt} \in D\left(A^{1/2}\left(t_{n+1} - 0\right)\right),$$

и, следовательно, существуют гладкие решения $\tilde{\psi}_n(s)$ задач Коши (10), (11). Поэтому функции $\psi_n(t) = \tilde{\psi}_n\left(t_{n+1} - t\right)$ являются гладкими решениями задач Коши (8), (9), т. е. $\psi_n(t) \in D(A(t))$, $t \in I_n, d^i\psi_n/dt^i$, $A(t)\psi_n \in L_2(I_n, H)$, $i = \overline{0,2}$. На этом основании из тождества (6) получаем равенство