

Лекция 1.

Гармонические колебания.

Введение. Колебания – это, пожалуй, наиболее универсальный тип движения в природе, технике и обществе. Колеблются струны гитары и маятник настенных часов, атомы и молекулы, давление и температура воздуха, число автомобилей на улицах города и количество пассажиров железных дорог и воздушных линий, уровень производства и рейтинги политиков, цены и индексы деловой активности, вибрируют машины, механизмы и другие технические устройства, каждые 11 лет то возрастает, то убывает число пятен на Солнце и солнечная активность в целом, бьется сердце, то растет, то снижается численность зайцев и косуль в лесах данной местности, колебания электрического поля “работают” в телефоне, радиоприемнике, телевизоре, компьютере. . . При наличии подходящей среды колебания распространяются в ней в виде волн: в некотором смысле, волны – это колебания сразу во времени и в пространстве.

Понятие “колебание” довольно расплывчато, интуитивно, но весьма ёмко и, что очень важно, распространяется на все новые и новые процессы и явления. Оно включает в себя практически все изменения состояния любого объекта, в которых достаточно отчетливо просматривается в той или иной степени повторяемость, возвращаемость к некоторому “исходному” (“среднему”, “равновесному” и т.д.) состоянию, цикличность. Для такого предмета исследования нужны, очевидно, свои, особые подходы и методы. В отличие, скажем, от механики, теория колебаний почти не занимается вопросом о том, что происходит в данный момент времени в данном месте. Для нее основной интерес представляет *общий характер* процесса, рассматриваемого *в целом*, за большое время.

При изучении процессов *в целом* удалось выявить важные общие свойства и закономерности, присущие всем видам колебаний вне зависимости от их природы, что и дает основание для выделения теории колебаний и волн как самостоятельной области знания. Познание этих закономерностей, глубокое овладение ими позволяют исследователю и инженеру выработать ту чрезвычайно полезную способность, которую основатель отечественной школы физики колебаний академик Л.И.Мандельштам называл “колебательным мышлением” и “колебательной интуицией”. Цель данных лекций – помочь студенту сделать первые шаги в этом направлении.

Основные виды колебаний. Характер колебаний сильно зависит от механизма их возникновения (и поддержания), т.е. от вида возмущения, действующего на колебательную систему. Принято различать свободные колебания, вынужденные колебания, автоколебания и параметрические колебания.

Свободные, или *собственные*, колебания – это такие движения, когда после начального возмущения система не подвергается внешнему воздействию, т.е. к ней во время движения не подводится энергия извне. Пример – маятник, получивший в начальный момент отклонение или толчок и далее колеблющийся сам по себе. Совершая свободные колебания, система, как правило, теряет энергию (на трение, излучение и т.д.), так что свободные колебания обычно *затухают* – их размах (амплитуда) со временем уменьшается.

Система, совершающая *автоколебания*, получает энергию от внешнего источника, *не обладающего колебательными свойствами*, причем система сама “решает”, в какой момент и сколько энергии взять у источника, чтобы точно компенсировать потери (на трение, джоулево тепло и т.д.). Примером могут служить часы, в которых роль источника энергии играет поднятый груз (гири), закрученная пружина или батарейка.

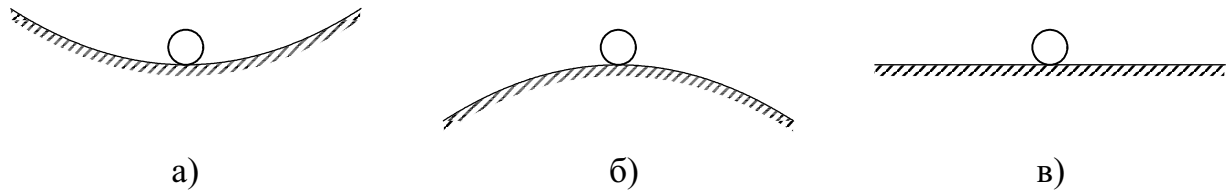


Рис. 1: Виды равновесия: а – устойчивое, б – неустойчивое, в – безразличное.

Вынужденные колебания система совершает под действием внешней силы (воздействия), имеющей колебательный характер, задающей частоту и амплитуду колебаний и обеспечивающей колебательный процесс необходимой энергией. Таковы колебания в контуре радиоприемника, наведенные током антенны.

Наконец, *параметрические колебания* возбуждаются за счет периодического изменения внешним воздействием параметров колебательной системы. В качестве примера можно назвать качели, т.е. маятник, у которого расстояние от точки подвеса до центра тяжести (“длина нити”) периодически изменяется.

При свободных колебаниях и автоколебаниях частота колебаний определяется устройством самой колебательной системы. Поэтому эти колебания называют *автономными*, в отличие от параметрических и вынужденных колебаний, называемых *гетерономными*, поскольку их частота задается внешним воздействием.

Равновесие. Уровень сложности любой системы определяется, в первую очередь, тем, сколько у нее *степеней свободы*, т.е. какое количество независимых движений¹ она может совершать. Так, материальная точка, которая может двигаться вдоль заданной прямой, либо на всей плоскости, либо во всем пространстве, имеет, соответственно, одну, две или три степени свободы. Чтобы в начальный момент $t = t_0$ полностью задать дальнейшее движение системы с N степенями свободы, надо задать $2N$ начальных условий, например, значения N начальных координат и N компонент начальной скорости точки. Таким образом, можно сказать, что *число степеней свободы равно половине числа начальных условий, которые необходимо задать, чтобы полностью определить дальнейшее движение системы*.

Рассмотрим систему с **одной степенью свободы**. Ее состояние в каждый момент времени t задается некоторой переменной (обобщенной координатой) $x(t)$ и скоростью изменения этой переменной со временем (обобщенной скоростью) $v(t) = dx/dt$. Среди всех возможных движений системы особую роль играют те, при которых $x(t) = \text{const}$ и $v(t) = 0$. Это – *состояния равновесия*, в которых при отсутствии внешних воздействий система может оставаться сколь угодно долго.

Если систему чуть-чуть вывести из положения равновесия² $x(t) = x_0$, возможны три варианта ее дальнейшего поведения (см. рис. 1):

- а) возникнет сила, стремящаяся вернуть систему в положение равновесия (*устойчивое равновесие*);
- б) возникнет сила, вызывающая движение системы от равновесия (*неустойчивое равновесие*);
- в) не возникнет никаких сил (*безразличное равновесие*).

Гармонические колебания. Система, выведенная из положения устойчивого равновесия $x = x_0$, стремится в него вернуться и при этом совершает вблизи x_0 свободные (собственные) колебания. Рассмотрим этот процесс на примерах.

¹Движение здесь следует понимать в общем смысле, как изменение состояния.

²Следует различать *состояние* равновесия (покоя системы) и *положение* равновесия, т.е. точку с координатой $x = x_0$, в которой система может покоиться, но может и проходить ее в движении.

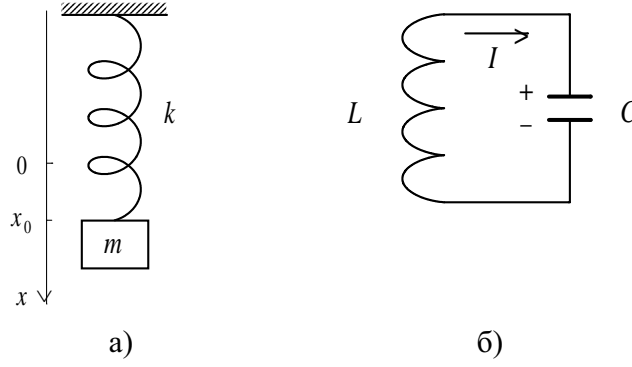


Рис. 2: а – пружинный маятник, б – колебательный контур.

Пример 1. Пружинный маятник (вертикальные колебания массы m , подвешенной на пружине жесткости k , рис. 2 а).

Когда сила тяжести $F_{\text{т}} = mg$ и сила растяжения пружины $F_{\text{пр}} = -kx$ уравновешивают друг друга, масса находится в положении равновесия $x = x_0 = mg/k$. При отклонении $x' = x - x_0$ от положения равновесия на массу действует сила $F = mg - kx = -kx'$, прямо пропорциональная величине отклонения, которая по второму закону Ньютона,

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = -k x', \quad (1.1)$$

создает ускорение, направленное к положению равновесия $x = x_0$ ($x' = 0$). Общее решение этого уравнения,³

$$x'(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.2)$$

или

$$x(t) \equiv x_0 + x' = x_0 + c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t = x_0 + A \cos(\omega t + \varphi),$$

имеет вид колебаний вокруг положения равновесия, циклическая частота ω , амплитуда A и начальная фаза φ которых находятся по формулам

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \text{tg } \varphi = -\frac{c_2}{c_1}. \quad (1.3)$$

Скорость и ускорение вычисляются из (1.2) дифференцированием:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx'}{dt} = -\omega c_1 \sin \omega t + \omega c_2 \cos \omega t = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \\ a(t) &= \frac{dv}{dt} = -\omega^2 c_1 \cos \omega t - \omega^2 c_2 \sin \omega t = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) \equiv -\omega^2 x'. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Графики $x(t)$, $v(t)$ и $a(t)$ показаны на рис. 3. Заметим, что частота ω связана с растяжением пружины в равновесии (так называемой статической деформацией) x_0 и может быть по нему найдена: так как $x_0 = mg/k$, то $\omega \equiv \sqrt{k/m} = \sqrt{g/x_0}$.

Коэффициенты c_1 и c_2 определяются тем, как именно был выведен грузик из положения равновесия. Если в начальный момент времени ($t = 0$) отклонение от положения равновесия $x' = x'_0$, а скорость $v = v_0$, то, полагая в (1.2) и (1.4) $t = 0$, находим:

$$x'_0 = c_1, \quad v_0 = \omega c_2, \quad \text{или} \quad c_1 = x'_0, \quad c_2 = \frac{v_0}{\omega}. \quad (1.5)$$

³Формулы преобразования синусов и косинусов приведены в Приложении.

Как и следовало ожидать, задание при $t = 0$ начальных координаты и скорости полностью определяет движение системы (коэффициенты c_1 и c_2).

Пример 2. Колебательный контур (LC -контур, рис. 2 б).

По второму закону Кирхгофа сумма падений напряжения на индуктивности L и ёмкости C равна нулю:

$$U_L + U_C = L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0, \quad I = \frac{dq}{dt},$$

где U_C и q – напряжение и заряд на конденсаторе, I – ток в контуре. Второе уравнение отражает тот факт, что заряд на пластины конденсатора приносит ток. Выражая I через q , получаем уравнение движения заряда в контуре:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{q}{C}, \quad (1.6)$$

которое, с точностью до обозначений, совпадает с (1.1): мерой инертности (вместо массы m) служит индуктивность L , а роль жесткости играет величина, обратная ёмкости конденсатора. Аналогичные уравнения имеют аналогичные решения (ср. с (1.2) и (1.4)):

$$q = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi), \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (1.7)$$

$$I = -\omega c_1 \sin \omega t + \omega c_2 \cos \omega t = -\omega A \sin(\omega t + \varphi),$$

и если при $t = 0$ $q = q_0$ (или $U_C = U_0$) и $I = I_0$, то (ср. с (1.5))

$$q_0 = c_1, \quad I_0 = \omega c_2, \quad \text{или} \quad c_1 = q_0 = C U_0, \quad c_2 = \frac{I_0}{\omega}. \quad (1.8)$$

Обе рассмотренные системы совершают колебания вокруг положения равновесия по закону косинуса. Такие колебания называются *гармоническими*. Как видно из формул (1.2) и (1.7), гармонические колебания имеют три параметра: *амплитуду* A , *циклическую* (или *угловую*) *частоту* ω и *начальную фазу* φ . Весь аргумент косинуса в правых частях (1.2) и (1.7), $\Phi(t) = \omega t + \varphi$, называется *полной фазой* колебания.

Косинус и синус – 2π -периодические функции,⁴ поэтому значения всех колеблющихся величин (координаты, скорости и ускорения в Примере 1, заряда, напряжения и тока в Примере 2) повторяются при изменении полной фазы колебания на 2π , т.е. через такой промежуток времени T , что $\omega T = 2\pi$. T называется *периодом* колебаний, показывает, за какое время совершается одно **полное** колебание, и измеряется в секундах. Циклическая частота ω равна приращению (в радианах) полной фазы колебаний за 1 с и измеряется в обратных секундах (с^{-1}). Широко используется также частота $f = 1/T$, показывающая, сколько полных колебаний совершает система за 1 с; для нее введена специальная единица измерения – *герц* (1 Гц = 1 колебание/с). Период T , частоты f и ω , связанные между собой соотношениями

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \quad (1.9)$$

зависят только от устройства колебательной системы (массы и жесткости пружины в Примере 1, индуктивности и ёмкости контура в Примере 2) и **не зависят** от характера начального возмущения (начальных условий). Напротив, амплитуда A и начальная фаза

⁴См. Приложение.

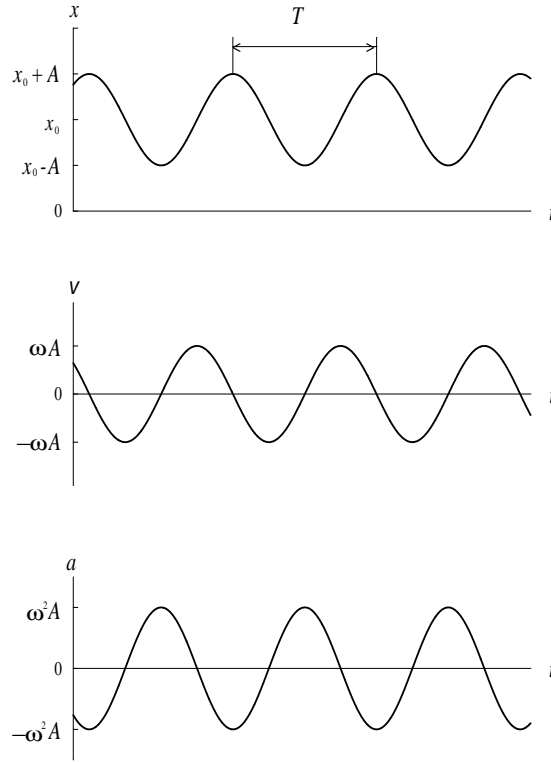


Рис. 3: Зависимость координаты, скорости и ускорения от времени при гармонических колебаниях.

φ колебаний, как видно из формул (1.3), (1.5) и (1.8), определяются именно начальными условиями.

Одинаковый характер поведения столь разных систем, как пружинный маятник и LC -контур, вовсе не случайность, это следствие **одинаковой** – а именно, **линейной** – зависимости “возвращающей силы” от смещения из положения равновесия (т.е. от x' и q соответственно, ср. уравнения (1.1) и (1.6)). Именно такая зависимость “силы” от смещения и обеспечивает гармонический (синусоидальный) закон колебаний.

Осознав это, легко понять, что гармонические колебания представляют собой *универсальный вид движения*, свойственный практически всем системам вблизи устойчивого равновесия. В самом деле, в равновесии ($x = 0$) сумма сил, действующих на систему, равна нулю: $F(0) = 0$. При отклонении от равновесия возникает возвращающая (равновесие ведь устойчивое!) “сила” $F(x)$, и если отклонение мало, то с высокой точностью зависимость $F(x)$ линейная: $F(x) = -Kx$.⁵ Следовательно, и движение при малых отклонениях будет с высокой точностью гармоническим колебанием.

Итак, в любом случае, когда движение системы описывается (пусть даже приближенно) уравнением

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -Kx, \quad \text{или} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x, \quad \omega^2 = \frac{K}{M} > 0, \quad (1.10)$$

можно сразу сказать, что система совершает гармонические колебания: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$. Гармонический осциллятор – так называется уравнение (1.10) и все описываемые им системы – это самая простая и, ввиду своей универсальности, *основная* модель теории колебаний.

⁵При малых x можно $F(x)$ разложить в ряд Тейлора по степеням x (штрих обозначает производную по x): $F(x) = 0 + F'(0)x + \frac{1}{2}F''(0)x^2 + \dots$, причем главным в этом разложении будет линейный по x член, и чем меньше x , тем меньше отличается зависимость $F(x)$ от линейной. Нелинейной эта зависимость будет только в том особом случае, когда $F'(0) = 0$.

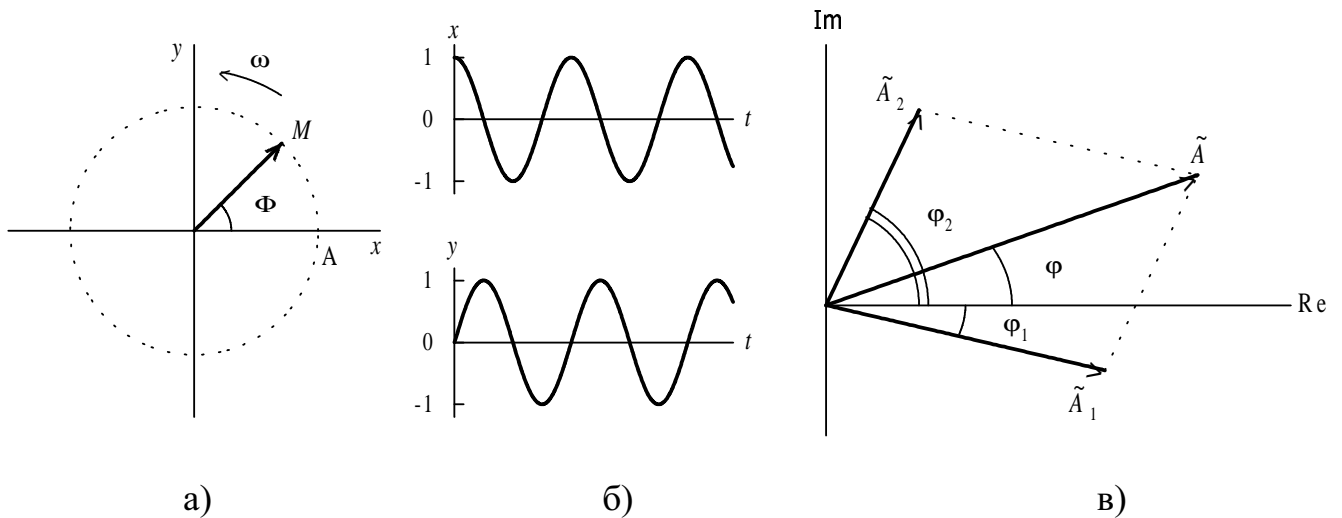


Рис. 4:

Аналогия с вращательным движением. Гармоническим колебаниям можно дать наглядную геометрическую интерпретацию. Пусть точка M на плоскости (x, y) равномерно движется по окружности радиуса A с центром в начале координат (рис. 4 а). При этом угол Φ между радиусом-вектором точки и осью x меняется со временем линейно, $\Phi = \omega t + \varphi$, а координаты точки ,

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (1.11)$$

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

совершают гармонические колебания одинаковой амплитуды, с одной и той же циклической частотой ω ⁶ и сдвигом по фазе $\pi/2$ (рис. 4 б). При изменении фазы (угла поворота) $\Phi = \omega t + \varphi$ на 2π , т.е. за период $T = 2\pi/\omega$, точка M завершает полный оборот и возвращается в исходное положение, а $x(t)$ и $y(t)$ принимают свои исходные значения – в этом и состоит периодичность вращательного и колебательного движений.

В теории колебаний важную роль играет *разность фаз* сравниваемых колебательных движений. Поскольку $\sin x = \cos(x - \pi/2)$, то говорят, что в (1.11) колебание $x(t)$ *опережает* по фазе на четверть периода (на $\pi/2$) колебание $y(t)$, а $y(t)$, в свою очередь, *отстает* по фазе на $\pi/2$ от колебания $x(t)$ (и оно действительно отстает, если смотреть по ходу вращения точки M). Аналогично, в Примере 1 скорость $v(t)$ отстает по фазе на четверть периода от ускорения $a(t)$ (см. (1.4) и рис. 3) и на столько же опережает отклонение от равновесия $x'(t)$. Точно так же ток $I(t)$ в Примере 2 опережает по фазе на $\pi/2$ колебание заряда $q(t)$.

Комплексное представление. При исследовании колебательных процессов часто оказывается полезным перейти к комплексным величинам с помощью формулы Эйлера (см. Приложение):

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x. \quad (1.12)$$

Умножим второе уравнение (1.11) на мнимую единицу j и сложим с первым, используя формулу Эйлера:

$$\tilde{x}(t) = x(t) + j y(t) = A [\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)] = A e^{j(\omega t + \varphi)}.$$

Величина $\tilde{x}(t)$ называется *комплексным представлением* колебания $x(t)$.⁷ Легко видеть,

⁶ Она потому и была названа циклической, или круговой, что соответствует угловой скорости вращения.

⁷ Здесь и далее тильдой отмечаются комплексные величины.

что (Re и Im обозначают вещественную и мнимую части комплексного числа):

$$x(t) = \operatorname{Re} \{ \tilde{x}(t) \}, \quad y(t) = \operatorname{Im} \{ \tilde{x}(t) \}.$$

Преобразуем $\tilde{x}(t)$:

$$\tilde{x}(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)} = A e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \tilde{A} e^{j\omega t}. \quad (1.13)$$

Величина $\tilde{A} = A e^{j\varphi}$ называется *комплексной амплитудой* колебания. Ее модуль равен амплитуде, а аргумент – начальной фазе колебания $x(t)$, следовательно, комплексная амплитуда несет всю информацию о начальном возмущении, возбуждившем гармоническое колебание, а зависимость от времени содержится в экспоненте $e^{j\omega t}$.

Поскольку все линейные операции (сложение, вычитание, дифференцирование, интегрирование) проводятся раздельно с вещественной и мнимой частями, можно проводить их не с самим колебанием $x(t)$, а с его комплексным представлением $\tilde{x}(t)$, и только в конце, при получении результата, выделить вещественную часть. Наибольший выигрыш такой способ дает при дифференцировании и интегрировании – эти операции сводятся к умножению и делению:

$$\frac{d}{dt} (\tilde{A} e^{j\omega t}) = j\omega \tilde{A} e^{j\omega t}, \quad \int dt \tilde{A} e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega} \tilde{A} e^{j\omega t} = -\frac{j}{\omega} \tilde{A} e^{j\omega t}. \quad (1.14)$$

Комплексное представление удобно и во многих других случаях.

Принцип суперпозиции. Если проанализировать формулы (1.2) и (1.7), можно заметить, что в каждом случае колебание состоит из двух составляющих: первая (с коэффициентом c_1) обусловлена начальным отклонением от равновесия (смещением в Примере 1 и зарядом (напряжением) в Примере 2), а вторая (с коэффициентом c_2) – начальной скоростью.⁸ Каждую из этих составляющих можно задавать и изменять независимо от другой. Это замечательное свойство – следствие *линейности* описывающих колебания уравнений (1.1) и (1.6).

Как доказывается в курсе математики [1], для линейных дифференциальных уравнений справедлив *принцип суперпозиции*: если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – решения такого уравнения, то их *линейная комбинация* $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ с произвольными постоянными коэффициентами c_1 и c_2 – тоже решение. Принцип суперпозиции позволяет отдельно найти составляющие части (“стандартные блоки”) решения, а затем сложить из них единое целое. Во многих случаях это существенно облегчает расчеты (например, расчеты радиочепей).

Для практического применения принципа суперпозиции нужен простой и удобный способ сложения колебаний одной частоты, но с разными амплитудами и начальными фазами. Его можно получить с помощью комплексного представления колебаний. Пусть нужно сложить колебания $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ и $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$, и пусть $\tilde{x}_1 = \tilde{A}_1 e^{j\omega t}$ и $\tilde{x}_2 = \tilde{A}_2 e^{j\omega t}$ – комплексные представления этих колебаний. Складывая их,

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_1(t) + \tilde{x}_2(t) = \tilde{A}_1 e^{j\omega t} + \tilde{A}_2 e^{j\omega t} = (\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) e^{j\omega t},$$

видим, что комплексная амплитуда суммарного колебания $\tilde{x} = \tilde{A} e^{j\omega t}$ равна сумме комплексных амплитуд слагаемых:

$$\tilde{A} = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2. \quad (1.15)$$

Выделяя у \tilde{A} модуль и аргумент,

$$\tilde{A} = A e^{j\varphi}, \quad A = \sqrt{(\operatorname{Re} \tilde{A})^2 + (\operatorname{Im} \tilde{A})^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{Im} \tilde{A}}{\operatorname{Re} \tilde{A}},$$

⁸Ток – это тоже скорость, скорость изменения заряда.

получаем амплитуду и фазу вещественного суммарного колебания:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \cos(\omega t + \varphi).$$

На комплексной плоскости равенство (1.15) выглядит, как правило сложения векторов (рис. 4 в). Получившаяся *векторная диаграмма* дает простой и наглядный способ сложения колебаний одной частоты:

- каждое из суммируемых колебаний $x_i(t)$ представляем вектором \mathbf{X}_i , длина которого равна амплитуде A_i , а угол наклона к оси абсцисс – начальной фазе φ_i этого колебания;
- складываем все \mathbf{X}_i по правилам сложения векторов;
- полученный в результате сложения вектор \mathbf{X} представляет сумму колебаний: его длина равна амплитуде A , а угол наклона к оси абсцисс – начальной фазе φ суммарного колебания.

При сложении двух колебаний (рис. 4 в) получим с помощью теоремы косинусов, что

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (1.16)$$

Обратим внимание на явление *интерференции* при сложении колебаний: амплитуда A суммарного колебания существенно зависит от разности фаз слагаемых. Она достигает максимальной величины, $A = A_1 + A_2$, в случае синфазных ($\varphi_2 = \varphi_1$) колебаний и минимальна, $A = |A_1 - A_2|$, если складываемые колебания находятся в противофазе ($\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\pi$). В (1.2) и (1.7) случай промежуточный: складываются “ортогональные” колебания ($\varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2$), так что амплитуда суммы находится по теореме Пифагора (см. (1.3)).

Энергия гармонических колебаний. Энергия – одна из важнейших характеристик любого движения, тесно связанная с работой, которую совершают вызывающие движение силы (см., например, [2]). Посмотрим, из чего складывается и как изменяется энергия при колебательном движении.

Пружинный маятник (рис. 2 а, уравнение (1.1)). Сила, действующая на массу со стороны пружины, $F = -k x'$, при перемещении dx' совершает работу $dA = F dx' = -k x' dx'$ и развивает мощность

$$P = \frac{dA}{dt} = F v = F \frac{dx'}{dt} = -k x' \frac{dx'}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{k x'^2}{2} \right).$$

Эта работа затрачивается на изменение кинетической энергии массы:

$$P = F v = m \frac{dv}{dt} v = \frac{d}{dt} \left(\frac{m v^2}{2} \right).$$

Сравнивая получившиеся выражения, приходим к соотношению

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m v^2}{2} + \frac{k x'^2}{2} \right) = 0,$$

из которого следует закон сохранения энергии

$$W = W_k + W_{\pi} \equiv \frac{m v^2}{2} + \frac{k x'^2}{2} = E = \text{const} \quad (1.17)$$

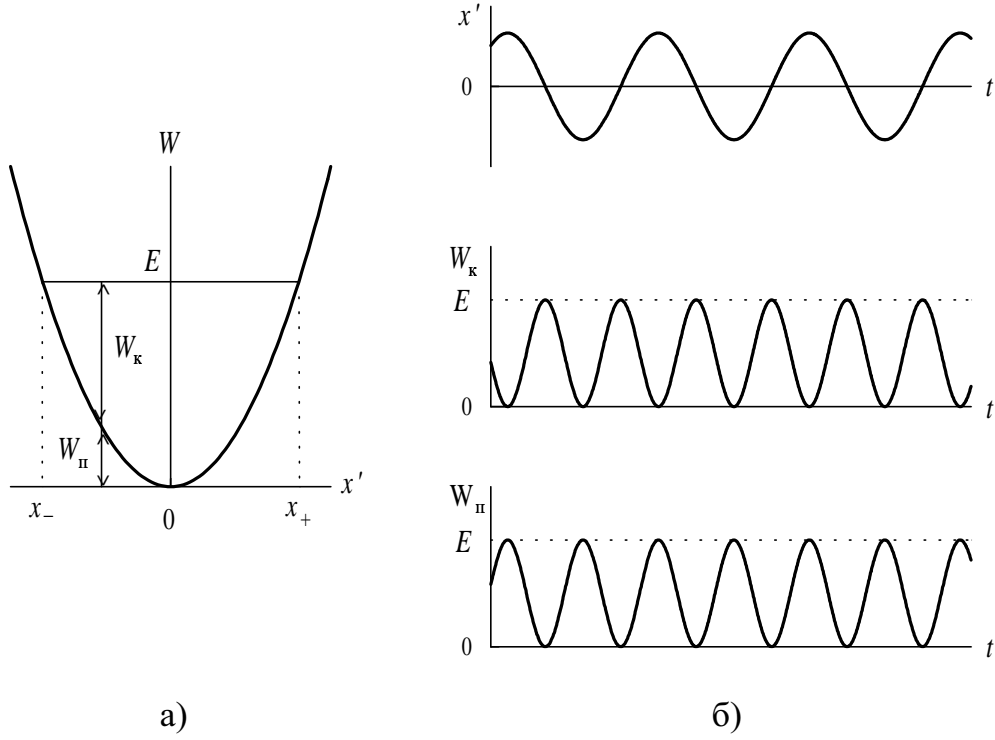


Рис. 5: а – потенциальная и кинетическая энергия как составляющие полной энергии E ; б – зависимость смещения, кинетической и потенциальной энергии от времени.

Полная энергия W складывается из кинетической энергии $W_{\text{к}}$ и потенциальной энергии $W_{\text{п}}$ и остается в процессе колебаний неизменной, равной постоянному значению E , которое определяется начальным возмущением: $E = mv_0^2/2 + kx_0'^2/2$. Составляющие же ее части, $W_{\text{к}}$ и $W_{\text{п}}$, изменяются: в процессе колебаний энергия переходит из одной формы в другую, т.е. из потенциальной в кинетическую и обратно (рис. 5 а). Кинетическая энергия максимальна и равна E при прохождении через положение равновесия $x' = 0$, где $W_{\text{п}} = 0$, и обращается в нуль (минимальна) при максимальном отклонении от равновесия, когда $W_{\text{п}} = E$. Таким образом,

$$W_{\text{к max}} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{2} = W_{\text{п max}} = \frac{kx_{\text{max}}'^2}{2} = E;$$

$$x_{\text{max}}' = A = \sqrt{\frac{2E}{k}}, \quad v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \omega A.$$

Чтобы рассмотреть процесс перехода энергии из одной формы в другую более детально, вычислим $W_{\text{к}}$ и $W_{\text{п}}$ с помощью (1.2) и (1.4):

$$W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{kA^2}{4} [1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)], \quad (1.18)$$

$$W_{\text{п}} = \frac{kx'^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{kA^2}{4} [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)].$$

Видно, что кинетическая и потенциальная энергии колеблются в противофазе, с частотой, равной удвоенной частоте колебаний системы, и изменяются от нуля до $kA^2/2 = E$ (рис. 5 б), а их сумма, как и следовало ожидать, постоянна: $W_{\text{к}} + W_{\text{п}} = kA^2/2 = E$.

Интересно отметить, что потенциальная энергия пружинного маятника (вспомним, что в равновесии $kx_0 = mg$),

$$W_{\text{п}} = \frac{kx'^2}{2} = \frac{k}{2}(x - x_0)^2 = \frac{kx^2}{2} - kx_0x + \frac{kx_0^2}{2} = \frac{kx^2}{2} - mgx + \frac{kx_0^2}{2},$$

складывается из потенциальной энергии растянутой пружины $kx^2/2$ и потенциальной энергии массы m в поле сил тяжести ($-mgx$).⁹

LC-контур (рис. 2 б, уравнение (1.6)). Здесь работа совершается против сил электрического поля (заряд “закачивается” в уже заряженный конденсатор): $dA = -U_C dq$, а развиваемая мощность есть

$$P = \frac{dA}{dt} = -U_C \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2C} \right).$$

Так как $U_L + U_C = 0$, то

$$P = -U_C \frac{dq}{dt} = U_L \frac{dq}{dt} = L \frac{dI}{dt} I = \frac{d}{dt} \left(\frac{LI^2}{2} \right).$$

Вычитая из последнего уравнения предыдущее, получаем соотношение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = 0,$$

и вытекающий из него закон сохранения энергии

$$W = W_H + W_E \equiv \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = E = \text{const.} \quad (1.19)$$

Здесь аналогом кинетической энергии служит энергия W_H магнитного поля в катушке индуктивности, а роль потенциальной энергии играет энергия W_E электрического поля в конденсаторе. В процессе колебаний энергия также переходит то в одну, то в другую форму, так что W_H и W_E колеблются в противофазе с удвоенной частотой (см. (1.18)) и

$$W_{E \text{ max}} = \frac{q_{\text{max}}^2}{2C} = W_{H \text{ max}} = \frac{LI_{\text{max}}^2}{2} = E;$$

$$q_{\text{max}} = A = \sqrt{2CE}, \quad I_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2E}{L}} = \omega A.$$

Задача. В колебательном контуре заменили конденсатор на новый, вдвое большей ёмкости. Как изменится энергия колебаний в контуре а) при той же амплитуде тока; б) при той же амплитуде напряжения на конденсаторе?

Решение. Так как $q = CU$, то

$$E = \frac{LI_{\text{max}}^2}{2} = \frac{q_{\text{max}}^2}{2C} = \frac{CU_{\text{max}}^2}{2},$$

так что в случае а) энергия не изменится, а в случае б) увеличится вдвое.

⁹Потенциальная энергия определена с точностью до произвольной константы, которая в данном случае выбрана так, что $W_{\text{п}} = 0$ при $x' = 0$; ось x направлена вниз, см. рис. 2 а.

Совершенно очевидно, что энергия сохраняется не только у пружинного маятника или в LC -контуре, – это свойство **любого** гармонического осциллятора. В самом деле, умножив уравнение гармонического осциллятора (1.10) на скорость $v = dx/dt$, получим

$$0 = M \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + K x \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{M}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{K x^2}{2} \right],$$

откуда и следует закон сохранения

$$W = W_k + W_{\pi} \equiv \frac{M}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{K x^2}{2} = \frac{M}{2} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \omega^2 x^2 \right] = E = \text{const.} \quad (1.20)$$

Мы будем называть его тоже законом сохранения энергии, хотя не во всякой системе сохраняющаяся величина W является энергией в физическом понимании этого термина. Составляющие W будем тоже именовать кинетической (W_k) и потенциальной (W_{π}) энергией. Их свойства, очевидно, такие же, как и в изученных выше частных случаях (см. (1.18) и рис. 5).

Определяющий признак гармонического осциллятора на языке энергии – это **квадратичная зависимость потенциальной энергии от смещения**: $W_{\pi} = K x^2/2$.¹⁰ Можно, в частности, показать, что из закона сохранения (1.20) следует гармонический закон движения $x = A \cos(\omega t + \varphi)$ с $A = \sqrt{2E/M}$ и $\omega = \sqrt{K/M}$, и только начальную фазу φ определить нельзя, нужно знать начальные смещение и скорость. Обратим также внимание на очень важный факт: частота колебаний гармонического осциллятора **не зависит** от амплитуды и энергии колебаний, при любой энергии и любой амплитуде осциллятор совершает полное колебание за один и тот же промежуток времени (период) T . Это свойство, называемое *изохронностью* колебаний, – тоже следствие **квадратичной зависимости** потенциальной энергии от смещения.

Легко видеть, что практически у всех систем зависимость $W_{\pi}(x)$ вблизи положения равновесия – квадратичная. Действительно, устойчивое равновесие находится в минимуме потенциальной энергии – на дне “потенциальной ямы”. А в минимуме производная $W'_{\pi}(0) = 0$, так что разложение $W_{\pi}(x)$ в ряд Тейлора начинается с квадратичного члена, $W_{\pi}(x) = W_{\pi}(0) + \frac{1}{2} W''_{\pi}(0) x^2 \dots$, который и является главным при малых x . Это – еще одно подтверждение уже известного нам факта, что вблизи устойчивого равновесия практически всякая система совершает гармонические колебания.

Энергия суммы колебаний. Принцип суперпозиции – одно из основных свойств гармонического осциллятора, он позволяет “собирать” колебание из “составляющих”. Рассмотрим, как ведет себя энергия при сложении колебаний.

Пусть гармоническое колебание $x(t)$ представляет собой сумму колебаний $x_1(t)$ и $x_2(t)$:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) = x_1(t) + x_2(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

С помощью (1.20) легко найти энергию каждого из этих колебаний:

$$E = \frac{K A^2}{2}, \quad E_1 = \frac{K A_1^2}{2}, \quad E_2 = \frac{K A_2^2}{2}.$$

¹⁰Линейная зависимость силы от смещения и квадратичная зависимость потенциальной энергии эквивалентны: из одной следует другая.

Складывая колебания $x_1(t)$ и $x_2(t)$ с помощью векторной диаграммы (рис. 4 в) и применяя теорему косинусов (1.15), находим, что

$$E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (1.21)$$

Таким образом, энергия суммарного колебания в общем случае *не равна* сумме энергий слагаемых и зависит от разности их фаз $|\varphi_2 - \varphi_1|$: если разность фаз меньше $\pi/2$, энергия суммы больше суммы энергий слагаемых, а если разность фаз больше $\pi/2$, ¹¹ энергия суммы меньше суммы энергий. И только при сложении “ортогональных” колебаний с разностью фаз $\pi/2$ энергия суммы колебаний равна сумме энергий слагаемых. Это “правило сложения энергий” – одна из граней явления интерференции колебаний.

Лекция 2.

Затухающие и вынужденные колебания.

Затухающие колебания. До сих пор мы пренебрегали диссипативными процессами, такими, как нагрев пружины при растяжениях и сжатиях или элементов колебательного контура при прохождении тока, излучение электромагнитных волн контуром, сопротивление среды (воздуха) движущимся частям колебательной системы и т.п. Как следствие, свободные колебания во всех рассмотренных выше случаях имели неизменную амплитуду, заданную начальным возмущением раз и навсегда. В реальных системах диссипативные процессы всегда есть, они черпают энергию из колебаний, поэтому амплитуда колебаний со временем уменьшается – колебания *затухают*. Как идет этот процесс и от чего зависит, мы рассмотрим на примере колебательного RLC -контура (рис. 6 а), состоящего из ёмкости C , индуктивности L и активного сопротивления R , в котором как раз и выделяется тепло при прохождении тока.

По второму закону Кирхгофа сумма падений напряжения на элементах контура равна нулю:

$$U_L + U_R + U_C = L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = 0.$$

Поскольку скорость изменения заряда q на конденсаторе равна току, $I = dq/dt$, можно записать это равенство в виде уравнения на q :

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0, \quad (2.1)$$

или, в приведенном виде,

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0. \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2) отличается от уравнения идеального контура (1.6) членом с первой производной. Сделаем замену $q(t) = f(t) e^{-\beta t}$:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \left[\frac{d^2 f}{dt^2} - 2\beta \frac{df}{dt} + \beta^2 f + \frac{R}{L} \frac{df}{dt} - \beta \frac{R}{L} f + \frac{f}{LC} \right] e^{-\beta t} = 0.$$

¹¹С физической точки зрения, наибольшая возможная разность фаз $|\varphi_2 - \varphi_1| = \pi$, она соответствует противофазным колебаниям, при сложении которых амплитуды вычитаются.

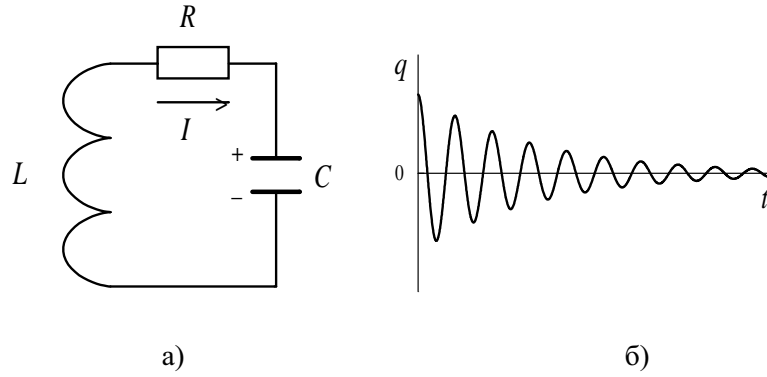


Рис. 6: а – колебательный контур; б – периодические затухающие колебания.

Полагая $\beta = R/(2L)$, исключаем первую производную и приходим к уравнению

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + (\omega_0^2 - \beta^2) f = 0, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.3)$$

Поведение его решения существенным образом зависит от того, какой из параметров больше, β или ω_0 .

1. Докритическая диссипация ($\beta^2 < \omega_0^2$). В этом случае (2.3) – это уравнение гармонического осциллятора, его общее решение $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, а закон изменения $q(t)$ имеет вид:

$$q(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi); \quad \beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (2.4)$$

Закон этот очень похож на гармоническое колебание (1.7), но есть весьма существенное отличие: амплитуда (размах) колебаний в (2.4),

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad (2.5)$$

экспоненциально убывает со временем. Это – *затухающие колебания* (рис. 6 б). Они имеют уже не три, как в (1.7), а четыре параметра: *начальную* (при $t = 0$) *амплитуду* A_0 , *коэффициент затухания* β , *циклическую частоту* ω и *начальную фазу* φ . Как видно из (2.4), коэффициент затухания β и частота ω задаются конструкцией колебательной системы (т.е. параметрами R , L и C), а начальные амплитуда и фаза находятся из начальных условий (например, заряда q_0 на конденсаторе и тока I_0 в контуре при $t = 0$) так же, как это делалось для гармонических колебаний. Кроме перечисленных, удобно ввести еще некоторые параметры, которые, конечно же, выражаются через эти основные параметры, но характеризуют затухающие колебания с несколько иной стороны.

Колебание (2.4) **не является** периодической функцией времени, единственное значение $q(t)$, которое периодически повторяется, – это нуль. Тем не менее, принято (и удобно) использовать величины, называемые периодом T и частотой f и связанные с циклической частотой ω так же, как и при гармонических колебаниях:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

Все эти три величины характеризуют “колебательную” составляющую процесса и показывают, через какой промежуток времени (с какой частотой) следуют друг за другом максимальные (или минимальные) значения колеблющейся величины. В уравнениях (2.3) и (2.4) был использован еще один параметр – *собственная частота* колебательного контура

$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Это та частота, с которой колебалась бы система в отсутствие диссипации (т.е. при $R = 0$, ср. с (1.7)). Как видно из (2.4), частота ω , с которой на самом деле колеблется ток в контуре, не превосходит ω_0 , т.е. диссипация замедляет колебания.

Скорость затухания колебаний (2.4) определяется коэффициентом затухания β , который показывает, насколько сильно уменьшается амплитуда за 1 с (амплитуда уменьшается в e раз за время $\tau = 1/\beta$, называемое *характерным временем затухания*). Кроме того, вводится величина, показывающая, во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний за период T :

$$\Lambda = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}, \quad (2.6)$$

и называемая *декрементом затухания*. Ее логарифм,

$$\lambda = \ln \Lambda = \beta T, \quad (2.7)$$

называется *логарифмическим декрементом затухания*. Близок к ним по физическому смыслу и еще один параметр, характеризующий затухание, – *добротность* колебательной системы:

$$Q = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (2.8)$$

Эти три параметра, Λ , λ и Q , позволяют соотнести скорость затухания с темпом колебаний: если $\lambda \ll 1$ ($Q \gg 1$), то $\Lambda \approx 1 + \lambda$ мало отличается от единицы, т.е. за одно колебание амплитуда меняется незначительно, затухание *слабое*. Если же $\lambda > 1$ (Q порядка или меньше единицы), изменение амплитуды за период T существенно, т.е. затухание *сильное*. При слабом затухании ($\lambda \ll 1$, $Q \gg 1$) частота колебаний (см. (2.6)),

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2 T^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\lambda^2}{2\omega_0^2 T^2}\right) \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\lambda^2}{8\pi^2}\right) = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right), \quad (2.9)$$

очень мало отличается от собственной частоты контура ω_0 , и это различие во многих случаях можно не учитывать и считать $\omega \approx 1/\sqrt{LC}$.

Задача. За $t_0 = 10$ мин амплитуда колебаний уменьшилась в 10 раз. За какое время t_1 она уменьшится в 100 раз? Чему равен коэффициент затухания?

Решение. Если за 10 мин амплитуда уменьшилась в 10 раз, то за следующие 10 мин она уменьшится еще в 10 раз. Итого, в 100 раз за 20 мин, т.е. $t_1 = 20$ мин. Далее,

$$e^{\beta t_0} = 10, \quad \beta t_0 = \ln 10 \approx 2.3 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\ln 10}{t_0} = \frac{\ln 10}{600} \approx 3.83 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}.$$

2. Закритическая диссипация ($\beta^2 > \omega_0^2$). В этом случае решение уравнения (2.3) имеет вид

$$f(t) = c_1 e^{\gamma t} + c_2 e^{-\gamma t}, \quad \gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Поскольку, очевидно, $\gamma < \beta$, зависимость $q(t)$,

$$q(t) = f(t) e^{-\beta t} = c_1 e^{-(\beta-\gamma)t} + c_2 e^{-(\beta+\gamma)t} \equiv c_1 e^{-\beta_1 t} + c_2 e^{-\beta_2 t}, \quad (2.10)$$

представляет собой сумму монотонно стремящихся к нулю экспонент, но ведет себя по-разному, в зависимости от величины и знака коэффициентов c_1 и c_2 при этих экспонентах (рис. 7), которые, в свою очередь, определяются начальными условиями.

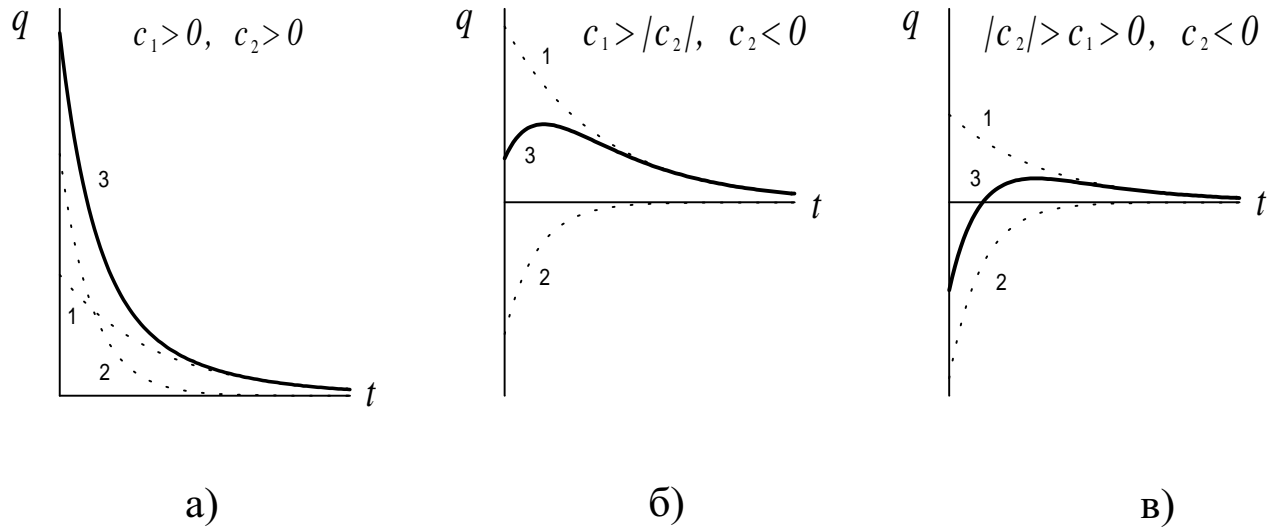


Рис. 7: Аperiодически затухающие колебания. 1 – медленно убывающая составляющая в (2.10) ($c_1 e^{-\beta_1 t}$); 2 – быстро убывающая составляющая ($c_2 e^{-\beta_2 t}$); 3 – решение (2.10) в целом.

Поясним рис. 7 с физической точки зрения. Если q_0 и I_0 имеют один знак, т.е. процесс начинается с дозарядки конденсатора (рис. 7б), то через некоторое время конденсатор зарядится ($I = 0$, $|q| = \max$), и начнется его разряд. Сопротивление цепи току столь велико, что разряд конденсатора не может создать достаточно сильный ток, а индуктивность – поддержать его достаточно долго для последующей (частичной) перезарядки конденсатора, возможен только его монотонный разряд до нуля. Если q_0 и I_0 имеют разные знаки, но начальный ток разряда не слишком велик ($|I_0| \leq |\beta_2 q_0|$), конденсатор также монотонно разряжается до нуля (рис. 7а). И только при достаточно сильном начальном токе разряда ($|I_0| > |\beta_2 q_0|$) конденсатору удастся перезарядиться один раз (рис. 7в). Несмотря на то, что ни один из описанных процессов не похож на колебательный, в литературе за ними закрепилось название *aperиодически затухающие колебания*.

Модель. Перепишем уравнение (2.1) в виде, максимально приближенном к уравнению гармонического осциллятора (1.10):

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -K x - R \frac{dx}{dt}. \quad (2.11)$$

Здесь x (вместо q) – отклонение от положения равновесия, коэффициент M отражает инерцию системы, K – ее “жесткость”, R – уровень диссипации. Это – простейшее обобщение модели гармонического осциллятора: в уравнение (1.10) добавлен всего лишь один член, пропорциональный скорости. Порядок уравнения не повысился, и оно осталось линейным, так что по-прежнему справедлив принцип суперпозиции. Иначе говоря, уравнение (2.11) имеет тот же математический уровень сложности, что и (1.10). Вместе с тем, оно дает более подробное, более адекватное описание колебательной системы, так как учитывает влияние дополнительного (и всегда присутствующего) фактора – процессов диссипации. Поэтому уравнение (2.11) представляет новую, более реалистическую модель колебательной системы с одной степенью свободы, чем гармонический осциллятор, – *линейный осциллятор с затуханием*.

Главное и вполне очевидное отличие новой модели в том, что энергия затухающих колебаний не сохраняется, а убывает со временем (рис. 8а). Чтобы убедиться в этом, умножим (2.11) на скорость $v = dx/dt$ и получим:

$$\frac{dW}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{M v^2}{2} + \frac{K x^2}{2} \right) = -R v^2 = -4\beta W_{\kappa} \leq 0. \quad (2.12)$$

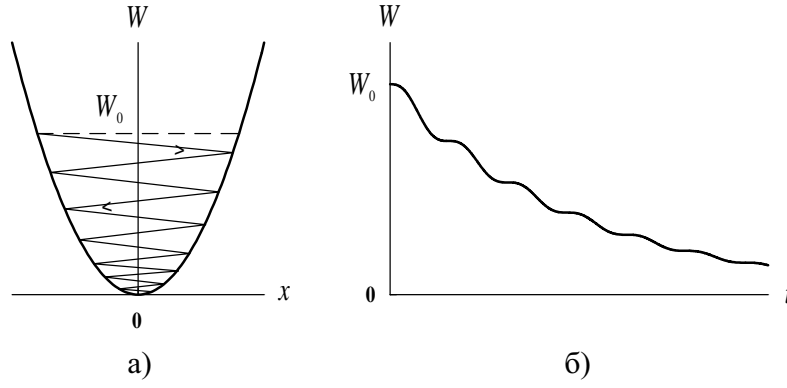


Рис. 8: а – энергетическая “траектория” осциллятора с учетом диссипации; б – зависимость от времени полной энергии затухающих колебаний.

При слабой диссипации ($R^2 < 4KM$) скорость колеблется, поэтому темп убывания энергии (наклон графика на рис. 8б) не постоянен, а тоже колеблется. Закон убывания энергии можно получить с помощью решения (2.4) (заменяв q на x):

$$W(t) = \frac{M}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{K x^2}{2} = \frac{K A_0^2}{2} e^{-2\beta t} \left[1 + \frac{\beta}{\omega_0} \sin(2\omega t + 2\varphi + \psi) \right], \quad \psi = \arctg \frac{\beta}{\omega}.$$

Гармонический осциллятор является предельным случаем осциллятора с затуханием: при $R \rightarrow 0$ уравнение (2.1) переходит в (1.6) (соответственно, (2.11) – в (1.10)), а его общее решение (2.4) – в (1.7). Поэтому при слабом затухании ($\lambda \ll 1$) обе модели дают практически неотличимые значения частоты (периода) и начальных амплитуды и фазы колебаний. Этим, однако, возможности модели гармонического осциллятора исчерпываются: долговременное¹ описание колебаний (включая изменение амплитуды со временем), так же, как и описание колебаний при не слабом затухании (в том числе, аperiodические режимы), способна дать только модель линейного осциллятора с затуханием (2.11).

В заключение отметим, что при построении модели (2.11) была использована вполне определенная *модель влияния диссипации на систему*, в которой диссипативная “сила” линейно зависит от скорости. Для колебательного контура это – естественное следствие закона Ома. В механической же системе такая зависимость характерна для *вязкого трения*, возникающего при движении в жидкости (газе) или при наличии смазки между трущимися поверхностями. Более привычная в механике сила “сухого” трения зависит от скорости *нелинейно*,² и ее учет привел бы к математически гораздо более сложной модели (см., например, [3]).

Вынужденные колебания. До сих пор мы изучали свободные (собственные) колебания, т.е. колебания, которые совершает система, выведенная из положения равновесия и далее предоставленная самой себе. В реальных условиях собственные колебания затухают из-за потерь энергии на диссипативные процессы. Для поддержания незатухающих колебаний нужна подпитка энергией извне, и есть несколько принципиально различных способов ее осуществления. Самый очевидный из них – “подталкивать” систему периодическим внешним воздействием, например, приложить к колебательному контуру э.д.с., наведенную в антенне радиоволной. Получающиеся при таком способе подпитки незатухающие колебания называются *вынужденными*. Рассмотрим этот класс колебаний на примере RLC -контура, возбуждаемого синусоидальным напряжением $U = U_0 \cos \Omega t$ (рис. 9 а).

¹На временах порядка и более времени затухания $\tau = 1/\beta$.

²Зависит только от направления скорости, но не от ее величины.

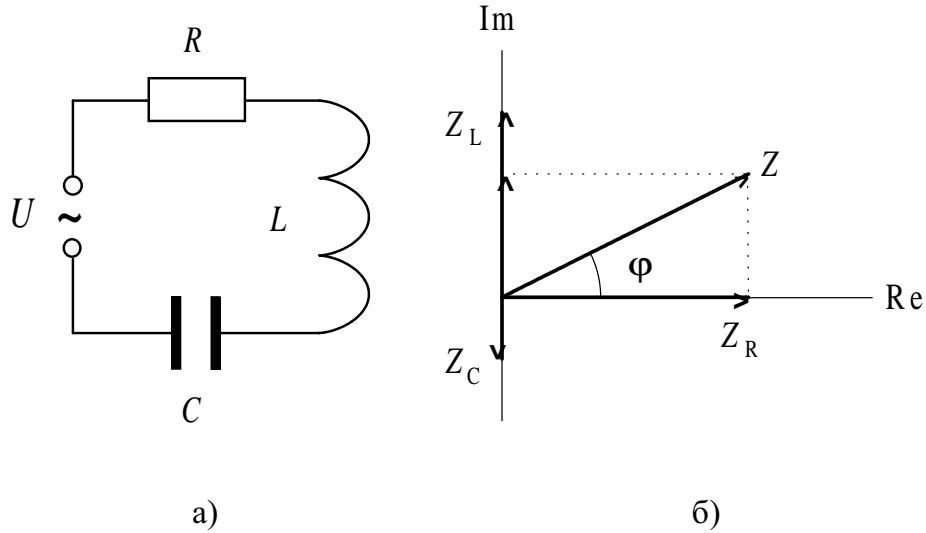


Рис. 9: а – колебательный контур, возбуждаемый сторонней э.д.с.;
б – векторная диаграмма для нахождения полного импеданса контура.

Второй закон Кирхгофа дает уравнение, описывающее изменение со временем заряда на конденсаторе $q(t)$ (ср. с (2.1)):

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U = U_0 \cos \Omega t. \quad (2.13)$$

Это – неоднородное линейное дифференциальное уравнение, и его решение (см. [1]) есть сумма частного решения неоднородного уравнения (2.13) и общего решения (2.4) ³ однородного уравнения (2.1):

$$q(t) = q_1(t) + A_* e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_*), \quad \beta = \frac{R}{2L}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (2.14)$$

Иными словами, колебания представляют собой сумму собственных затухающих колебаний контура и движения $q_1(t)$, навязанного сторонней э.д.с. Начальная амплитуда собственных колебаний A_* и фаза φ_* определяются, как обычно, по начальным данным, т.е. по значению тока I в контуре и заряда q (или напряжения U_C) на конденсаторе при $t = 0$. Но сначала нужно найти $q_1(t)$.

Естественно предположить, что поведение $q_1(t)$ такое же, как и у вынуждающей силы, т.е. что это – гармоническое колебание с частотой Ω . Чтобы упростить расчеты и сделать их физический смысл более ясным, перейдем к комплексному представлению:

$$U \rightarrow \tilde{U} = U_0 e^{j\Omega t}, \quad q_1 \rightarrow \tilde{q} = \tilde{q}_1 e^{j\Omega t},$$

в котором дифференцирование сводится к умножению на $j\Omega$, так что комплексный ток

$$\tilde{I} = \frac{d\tilde{q}}{dt} = j\Omega \tilde{q} \quad \text{и} \quad \tilde{q} = -\frac{j}{\Omega} \tilde{I}.$$

Выражая комплексное напряжение на каждом из элементов контура через ток,

$$\tilde{U}_L = L \frac{d\tilde{I}}{dt} = j\Omega L \tilde{I}, \quad \tilde{U}_R = R \tilde{I}, \quad \tilde{U}_C = \frac{\tilde{q}}{C} = -\frac{j}{\Omega C} \tilde{I},$$

³Считаем, что диссипация в контуре докритическая ($\beta < \omega_0$), так что собственные колебания – это затухающие периодические колебания (2.4).

видим, что справедлив своеобразный “закон Ома”: комплексное напряжение на каждом элементе прямо пропорционально комплексному току, $\tilde{U}_n = Z_n \tilde{I}$ ($n = L, R, C$). Коэффициенты пропорциональности Z_n называют *импедансами* (комплексными сопротивлениями) соответствующих элементов схемы:

$$Z_L = j \Omega L, \quad Z_R = R, \quad Z_C = -\frac{j}{\Omega C} = \frac{1}{j \Omega C}. \quad (2.15)$$

Элементы с вещественным импедансом (R) принято называть *активными* сопротивлениями, а элементы, имеющие чисто мнимый импеданс (L и C), – *реактивными*.

Подстановка в уравнение (2.13) дает “закон Ома” для всей цепи:

$$\tilde{U} = Z_L \tilde{I} + Z_R \tilde{I} + Z_C \tilde{I} = (Z_L + Z_R + Z_C) \tilde{I} = Z(\Omega) \tilde{I} = |Z(\Omega)| e^{j\varphi(\Omega)} \tilde{I}.$$

Как и следовало ожидать, при последовательном соединении импедансы складываются (по правилу сложения комплексных чисел, рис. 9 б). Полный импеданс контура $Z = Z_L + Z_R + Z_C$ – это, вообще говоря, комплексное число, зависящее от частоты Ω : его модуль $|Z|$ представляет полное эффективное сопротивление цепи и равен отношению амплитуд сторонней э.д.с. и тока в контуре, а аргумент φ равен сдвигу фаз между током и напряжением. Таким образом, возвращаясь к вещественной форме записи, получаем:

$$U = U_1 \cos \Omega t, \quad I = \operatorname{Re} \tilde{I} = I_1 \cos(\Omega t - \varphi), \quad q_1(t) = \operatorname{Re} \left(-j \frac{\tilde{I}}{\Omega} \right) = \frac{I_1}{\Omega} \sin(\Omega t - \varphi); \quad \frac{U_1}{I_1} = |Z|. \quad (2.16)$$

Принято говорить, что напряжение *опережает* ток на φ , если $\varphi > 0$, и *отстает* от тока на $|\varphi|$, если $\varphi < 0$. Так, напряжение U_L на индуктивности **опережает** ток на $\pi/2$ (напомним, что $j = e^{j\pi/2}$), а напряжение U_C на конденсаторе **отстает** от тока на $\pi/2$.

Амплитуда тока в контуре и сдвиг фаз,

$$I_1 = \frac{U_1}{|Z|} = \frac{U_1}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right)^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{R} \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right), \quad (2.17)$$

определяются не только амплитудой U_1 и параметрами контура (L, R, C), но существенным образом зависят от частоты Ω (рис. 10). В пределе низких ($\Omega \rightarrow 0$) и высоких ($\Omega \rightarrow \infty$) частот ток стремится к нулю из-за неограниченно возрастающего импеданса ёмкости или индуктивности соответственно. “Главное сопротивление” определяет и сдвиг фаз: $\varphi \rightarrow -\pi/2$ при $\Omega \rightarrow 0$ (“ёмкостное сопротивление”) и $\varphi \rightarrow +\pi/2$ при $\Omega \rightarrow \infty$ (“индуктивное сопротивление”). Максимум амплитуды тока, $I_{1m} = U_1/R$, достигается при

$$\Omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad (2.18)$$

т.е. когда частота “вынуждающей силы” Ω равна собственной частоте контура ω_0 . При этом сопротивления реактивных элементов цепи (L и C) равны, противоположны по знаку и потому компенсируют друг друга, так что полное эффективное сопротивление контура минимально и равно активному сопротивлению R ; соответственно, и $\varphi = 0$.

Резкое возрастание тока при $\Omega \rightarrow \omega_0$ называется *резонансом* в колебательном контуре. Поскольку при этом $U_L \rightarrow -U_C$, так что $U_L + U_C \rightarrow 0$, этот резонанс называют также *резонансом напряжений*. График зависимости $I_1(\Omega)$ называется *резонансной кривой* – чем она уже и выше, тем более резко реагирует контур на отклонение Ω от *резонансной частоты* ω_0 , тем выше *избирательность* контура.

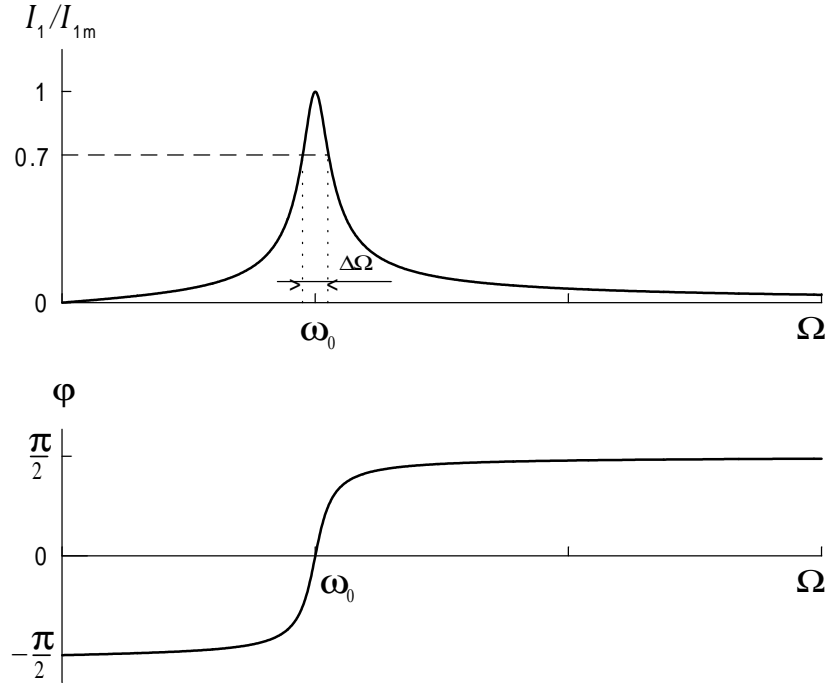


Рис. 10: Зависимость амплитуды и фазы тока в контуре от частоты Ω .

Избирательность зависит от *полосы пропускания* контура – диапазона изменения частоты Ω , в пределах которого мощность тока в контуре остается не меньше половины максимальной, т.е. мощности на резонансной частоте.⁴ Так как мощность пропорциональна квадрату тока, то внутри полосы пропускания амплитуда тока $I_1(\Omega) \geq I_{1m}/\sqrt{2} = U_1/(\sqrt{2} R) \approx 0.7 I_{1m}$. На границах полосы, при $\Omega_{\pm} = \omega_0 \pm \delta\Omega$, это неравенство переходит в равенство, и с помощью (2.17) находим:

$$\Omega_{\pm} L - \frac{1}{\Omega_{\pm} C} = \pm R, \quad \text{или} \quad \delta\Omega \left(L + \frac{1}{\omega_0^2 C} \right) = 2 L \delta\Omega = R,$$

откуда $\delta\Omega = R/(2L) = \beta$, а полная ширина полосы пропускания

$$\Delta\Omega = \Omega_+ - \Omega_- = 2\beta = \frac{R}{L} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta\Omega}{\omega} = \frac{2\beta}{\omega} = \frac{1}{Q}. \quad (2.19)$$

Таким образом, ширина полосы пропускания контура равна удвоенному коэффициенту затухания, а ее относительная величина обратна добротности: чем выше добротность Q (т.е. чем слабее затухание) тем меньше отношение ширины полосы пропускания к резонансной частоте и выше избирательность контура. Иными словами, добротность Q служит *количественной мерой* избирательности колебательной системы.

Посмотрим теперь на вынужденные колебания (2.16) с энергетической точки зрения. Это – гармонические колебания постоянной амплитуды, и их параметры (I_1 и φ) определяются, очевидно, балансом между скоростью диссипации энергии в контуре (2.12) и поступлением энергии от источника э.д.с.,⁵

$$\langle P_{\text{ист}} \rangle - \langle P_{\text{дисс}} \rangle = \frac{1}{2} U_1 I_1 \cos \varphi + \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2} U_1 I_1 \cos \varphi - \frac{1}{2} R I_1^2 = 0,$$

в чем легко убедиться, подставив I_1 и φ из (2.17). Интересно проследить за динамикой этого баланса при изменении частоты источника. На резонансной частоте скорость диссипации энергии максимальна, и источник передает контуру максимум своей мощности

⁴При одной и той же, разумеется, амплитуде U_1 сторонней э.д.с.

⁵Угловые скобки означают усреднение за период колебаний.

($\varphi = 0$, т.е. $\cos \varphi = 1$). При удалении от резонанса скорость диссипации уменьшается пропорционально I_1^2 , а мощность источника – медленнее, пропорционально I_1 . Баланс сохраняется потому, что контур потребляет лишь часть мощности источника, и достигается это за счет увеличения сдвига фазы φ между током и напряжением таким образом, чтобы $\cos \varphi$ уменьшался пропорционально I_1 .

Мы вычислили и исследовали отклик колебательного контура на синусоидальное напряжение. А каким будет ток в контуре, если напряжение $U(t)$ не синусоидальное, но периодическое, с периодом T (например, пилообразное)? Опираясь на **принцип суперпозиции**, легко ответить и на этот вопрос. Как известно (см. Приложение), всякую периодическую функцию, $U(t+T) = U(t)$, можно разложить в *ряд Фурье*, т.е. на сумму синусов и косинусов. В комплексной форме $U(t) = \operatorname{Re} \tilde{U}(t)$ и

$$\tilde{U}(t) = \frac{U_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} U_n e^{jn\Omega t},$$

где

$$U_n = \frac{2}{T} \int_0^T dt U(t) e^{-jn\Omega t}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots; \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Колебательный контур – линейная система, поэтому полный ток в нем равен *сумме токов, возбуждаемых каждой из гармоник напряжения* в отдельности:

$$\tilde{I}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n}{Z(n\Omega)} e^{jn\Omega t}, \quad Z(n\Omega) = R + jn\Omega L - \frac{j}{n\Omega C}.$$

Взяв вещественную часть, $I(t) = \operatorname{Re} \tilde{I}(t)$, получим искомую зависимость тока от времени. В практических приложениях хорошую точность, как правило, дает уже суммирование относительно небольшого (порядка десяти) числа гармоник.

При возбуждении контура несинусоидальной периодической э.д.с. также может наблюдаться явление резонанса. Если добротность контура высока ($Q \gg 1$), а в спектре э.д.с. есть гармоника (с номером $n = n_*$), частота которой равна (или близка) собственной частоте контура, $n_*\Omega = \omega_0$, то импеданс Z контура на этой частоте окажется гораздо меньшим, чем на остальных гармониках, и главной составляющей тока в контуре будет синусоидальное колебание с частотой $n_*\Omega$ и амплитудой $|U_{n_*}|/R$. Подчеркнем, что резонанс – это реакция осциллятора (контура) именно на присутствие в спектре внешней силы (э.д.с.) его *собственной частоты*, в то время как совпадение *периода T* внешней силы с периодом T_0 собственных колебаний, с одной стороны, не требуется, а с другой – недостаточно для резонанса. В самом деле, короткие импульсы, следующие с периодом $T = 2T_0$, раскачают сильные колебания (т.е. вызовут резонанс), поскольку в их спектре есть частота $2\Omega = 2(2\pi/T) = \omega_0$. Напротив, э.д.с. $U(t) = U_2 \cos 2\omega_0 t + U_3 \cos 3\omega_0 t$, имеющая период $T = T_0 = 2\pi/\omega_0$, не вызовет резонанса, а вызовет лишь слабый отклик на второй и третьей гармониках ω_0 (см. рис. 10).

Установление вынужденных колебаний. Формулы (2.16) дают частное решение уравнения вынужденных колебаний (2.13). Возвращаясь к его **общему решению** (2.14), видим, что оно представляет собой сумму (суперпозицию) **вынужденного гармонического колебания** $q_1(t)$, имеющего частоту “вынуждающей силы” Ω , и **собственного затухающего колебания** с частотой ω и коэффициентом затухания β . С течением времени собственные колебания, конечно, затухнут, и останется только вынужденное колебание

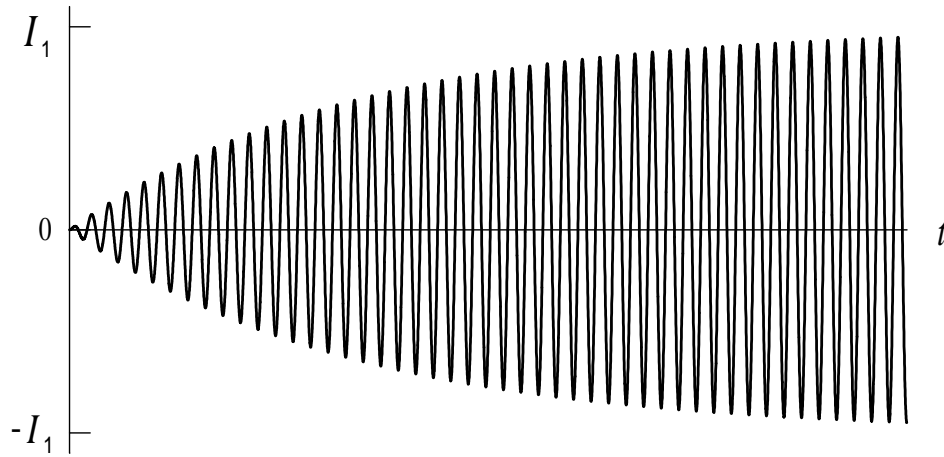


Рис. 11: Раскачка колебаний в контуре при возбуждении на резонансной частоте.

$q_1(t)$, но произойдет это не сразу, а при $t \gg \tau = 1/\beta$. В начале же (при $t < \tau$) колебания могут быть очень не похожи на $q_1(t)$.

Чтобы лучше понять суть явления резонанса, рассмотрим раскачку колебаний на резонансной частоте в контуре с высокой добротностью ($Q \gg 1$). В этом случае

$$\Omega = \omega_0 \approx \omega, \quad \varphi = 0, \quad q_1(t) = q_f \sin \Omega t = q_f \sin \omega t, \quad \text{где} \quad q_f = \frac{I_1}{\Omega} = \frac{U_1}{\omega R}.$$

Если колебания начинаются “с нуля” ($U_C = q/C$ и полный ток в контуре равны нулю при $t = 0$), то собственные колебания должны быть в противофазе с вынужденными и иметь такую же начальную амплитуду, $A_* = q_f$. Тогда

$$q(t) = q_f \sin \omega t - q_f e^{-\beta t} \sin \omega t = \frac{U_1}{\omega R} (1 - e^{-\beta t}) \sin \omega t.$$

На графике (рис. 11) видно, что вначале идет процесс установления, в течение которого система совершает большое число колебаний ⁶, а амплитуда постепенно растет, приближаясь к амплитуде q_f вынужденного колебания. На начальной стадии, при $\beta t \ll 1$,

$$e^{-\beta t} \approx 1 - \beta t, \quad \text{и} \quad q(t) \approx q_f \beta t \sin \omega t = \frac{U_1}{\omega R} \frac{R}{2L} t \sin \omega t = \frac{U_1}{2\omega L} t \sin \omega t,$$

т.е. амплитуда растет линейно со временем, и скорость роста **не зависит** от сопротивления R . От R зависит конечная (установившаяся) амплитуда $q_f = U_1/(\omega R)$, и чем меньше R , тем она больше, но, соответственно, тем **дольше** идет процесс установления.

Итак, резонанс в контуре с высокой добротностью, т.е. “резкое возрастание тока при $\Omega \rightarrow \omega_0$ ”, не наступает сразу, как только приложена э.д.с., а достигается в результате длительной (по сравнению с периодом колебаний T) постепенной раскачки колебаний этой “вынуждающей силой”. Иными словами, резонанс, как и почти все колебательные явления, – это *должным образом организованный процесс*.

Мы изучили резонанс в контуре, элементы которого соединены последовательно с источником э.д.с. В завершение темы рассмотрим кратко явление, в известной мере противоположное, – резонанс в “параллельном контуре” (рис. 12 а). При параллельном соединении складываются не сами сопротивления, а величины, им обратные (проводимости), поэтому

⁶Время установления составляет $(3 \div 4) \tau$, а при высокой добротности время затухания τ во много раз больше периода колебаний T .

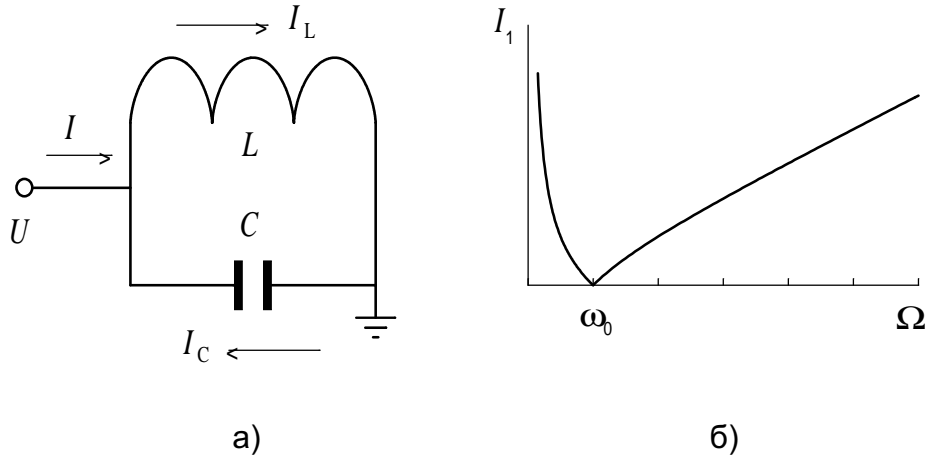


Рис. 12: а – схема параллельного включения колебательного контура;
б – зависимость амплитуды тока источника э.д.с. от частоты Ω .

связь между током и напряжением (в комплексном представлении) имеет вид:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{U}}{Z} = \tilde{U} \left(\frac{1}{j\Omega L} + j\Omega C \right) = -\frac{j\tilde{U}}{\Omega L} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \right); \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

В вещественной форме:

$$U = U_1 \cos \Omega t, \quad I = I_1 \cos(\Omega t - \varphi); \quad I_1 = \frac{U_1}{\Omega L} \left| 1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \right|, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\omega_0 - \Omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \Omega < \omega_0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \Omega > \omega_0. \end{cases}$$

Поведение тока (рис. 12 б) прямо противоположно показанному на рис. 10: в пределе низких ($\Omega \rightarrow 0$) и высоких ($\Omega \rightarrow \infty$) частот он неограниченно растет благодаря стремящемуся к нулю сопротивлению одной из ветвей контура (Z_L или Z_C соответственно), а при $\Omega = \omega_0$ обращается в нуль. Это резкое **уменьшение** тока источника тоже называется резонансом – *резонансом токов*. Приложенное напряжение U вызывает в каждой ветви контура свой ток, и при $\Omega = \omega_0$ эти токи равны по величине и противоположны по направлению, так что они замыкаются друг на друга, ток циркулирует исключительно **внутри контура**, не ответвляясь во внешнюю цепь; полное эффективное сопротивление контура при этом бесконечно.

В реальном контуре к реактивным сопротивлениям обязательно добавляются активные – сопротивление катушки и утечка конденсатора. Поэтому ток стремится к конечным (и, вообще говоря, разным) значениям в пределе низких и высоких частот и мал (но не равен нулю) на резонансной частоте. Сдвиг фаз φ , в свою очередь, меняется не скачком, а плавно, оставаясь положительным при $\Omega < \omega_0$ и отрицательным при $\Omega > \omega_0$.

Лекция 3.

Параметрические и автоколебания. Колебания систем с несколькими степенями свободы.

Параметрическая раскачка колебаний. Этот способ раскачки незатухающих колебаний связан с подпиткой энергией путем изменения параметров осциллятора (2.11) – “жесткости” K (как правило) или “инерции” M . Самый известный пример – качели, которые можно упрощенно представить в виде математического маятника с изменяющимся положением груза, т.е. с изменяющейся длиной нити. Но мы рассмотрим более простую и близкую к радиотехнике систему – колебательный контур (рис. 6 а) с конденсатором переменной ёмкости.

Ёмкость плоского конденсатора $C = \epsilon S/d$ зависит от площади пластин S , расстояния между ними d и проницаемости ϵ заполняющего конденсатор диэлектрика. Величиной ёмкости можно управлять, меняя, например, d или ϵ . Для простоты предположим, что у конденсатора есть два состояния с ёмкостью C_1 и C_2 , причем $C_1 < C_2$, а сопротивлением R контура пока пренебрежем, что позволит пользоваться законом сохранения энергии.

Как мы видели в Лекции 1, в процессе колебаний энергия переходит из одной формы в другую, а именно, из энергии электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля катушки индуктивности (см. уравнение (1.19) и следующие за ним формулы). Пусть в начальный момент $t = 0$ на конденсаторе находится заряд q_0 , а ток в контуре $I = 0$, и пусть ёмкость конденсатора минимальна, $C = C_1$, – это дает большее (при том же заряде) напряжение, разгоняющее ток в индуктивности. Когда конденсатор полностью разрядится ($q = 0$), а запасенная в нем энергия целиком перейдет в энергию магнитного поля,

$$W_0 = \frac{q_0^2}{2C_1} = \frac{L I_0^2}{2},$$

увеличим ёмкость до C_2 (в идеале это не требует затрат энергии, т.к. конденсатор не заряжен). В ходе последующей перезарядки конденсатор большей ёмкости получит больший заряд,

$$q_1^2 = C_2 L I_0^2 = 2 C_2 W_0 > q_0^2 = 2 C_1 W_0, \quad \text{или} \quad \left| \frac{q_1}{q_0} \right| = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} > 1. \quad (3.1)$$

Подчеркнем, что в описанных до сих пор процессах энергия колебаний сохранялась.¹ Но теперь, когда конденсатор полностью заряжен, и ток $I = 0$, уменьшим емкость до C_1 . Для этого придется совершить работу (например, раздвинуть пластины заряженного конденсатора)

$$A = \Delta W = W_1 - W_0 = \frac{q_1^2}{2C_1} - \frac{q_1^2}{2C_2} = \frac{C_2 - C_1}{2C_1 C_2} q_1^2 > 0 \quad (3.2)$$

и увеличить энергию колебательного контура до $W_1 = (C_2/C_1)W_0$. Затем процесс повторяется: разряд конденсатора при $C = C_1$, увеличение C до C_2 при $q = 0$ и максимальном токе, заряд конденсатора при $C = C_2$, подвод энергии путем уменьшения до C_1 ёмкости заряженного конденсатора при $I = 0$, и т.д.

За каждую половину периода колебаний контура конденсатор совершает полный цикл изменений ($C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_1$), а амплитуда колебаний увеличивается в $\alpha = \sqrt{C_2/C_1}$ раз (рис. 13 а), энергия же возрастает в $\alpha^2 = C_2/C_1$ раз. Таким образом, амплитуда и энергия колебаний увеличиваются со временем в геометрической прогрессии (индексом n отмеча-

¹А с учетом выделения тепла на сопротивлении R – даже уменьшалась.

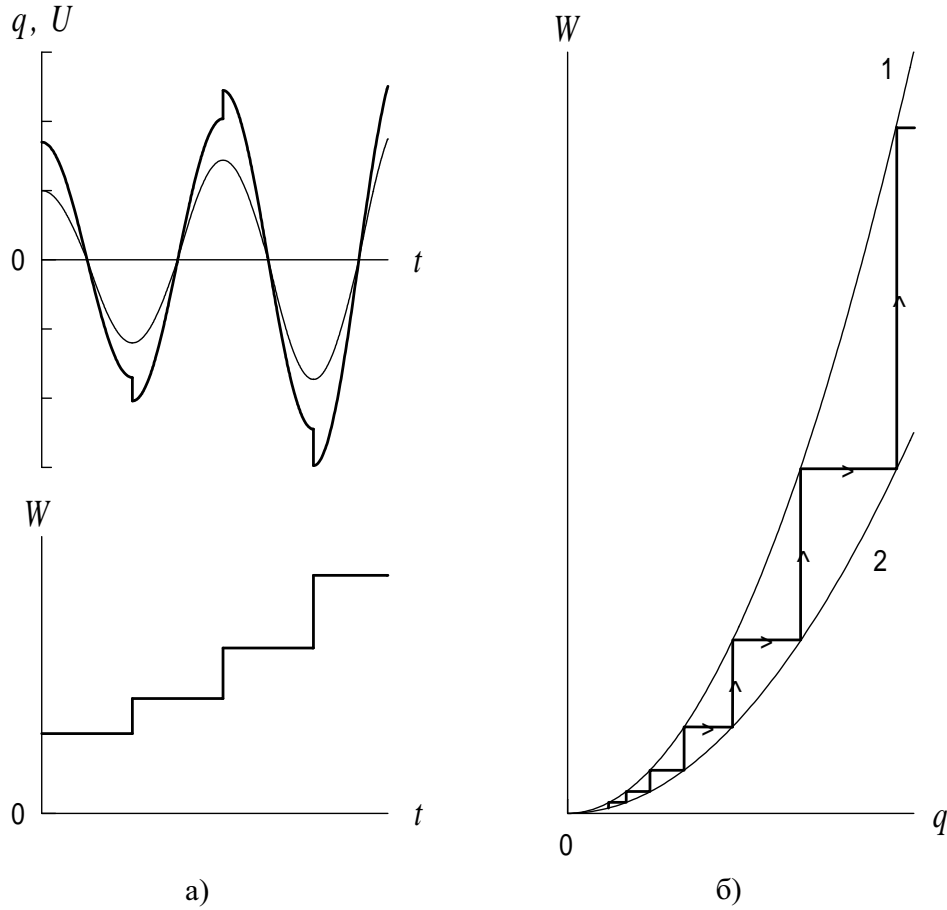


Рис. 13: Параметрическая раскачка колебаний в контуре:

а – колебания заряда q (тонкая линия) и напряжения U_C (жирная линия) на конденсаторе и рост энергии колебаний W со временем в идеальном контуре;

б – диаграмма роста амплитуды и энергии колебаний;

1 — $W = q^2/(2C_1)$, 2 — $W = q^2/(2C_2)$.

ется значение величины в конце n -го полупериода),

$$|q_n| = \alpha |q_{n-1}|, \quad W_n = \alpha^2 W_{n-1}, \quad \text{или} \quad |q_n| = \alpha^n |q_0|, \quad W_n = \alpha^{2n} W_0,$$

т.е. *экспоненциально*, за счет подвода энергии при изменении параметров системы (ёмкости конденсатора). Поэтому такой способ раскачки колебаний и называется *параметрическим*. Схематически процесс роста амплитуды и энергии колебаний показан на рис.13б: при каждом изменении C система “переходит” с одной параболы на другую, все более удаляясь от начала координат.

Ясно, что неограниченный рост амплитуды колебаний – следствие пренебрежения диссипативными процессами. Если учесть выделение тепла на активном сопротивлении контура R , то колебание между двумя последовательными подводами энергии становится затухающим с коэффициентом затухания $\beta = R/(2L)$. Амплитуда за этот промежуток времени, равный $T/2$,² уменьшается в $e^{\beta T/2} = \sqrt{\Lambda}$ раз, а энергия – в Λ раз, так что перед подводом энергии (уменьшением C до C_1) $W = W'_0 = W_0/\Lambda$, а сразу после

$$W = W'_1 = \frac{C_2}{C_1} W'_0 = \frac{C_2}{C_1 \Lambda} W_0 = \frac{\alpha^2}{\Lambda} W_0. \quad (3.3)$$

²Легко сообразить, что $T = \pi(\sqrt{LC_1} + \sqrt{LC_2})$.

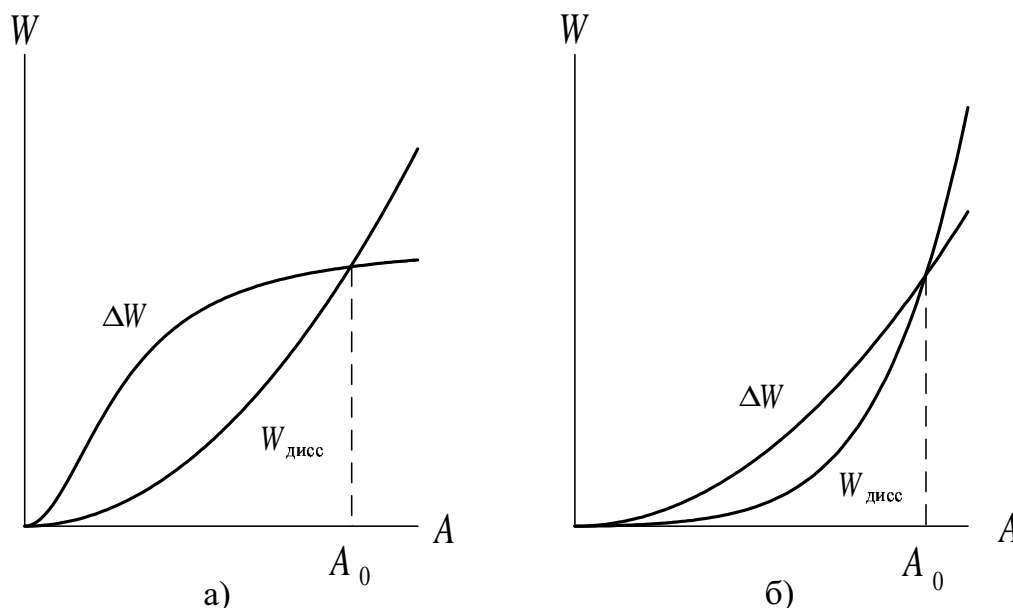


Рис. 14: Установление амплитуды колебаний в результате достижения баланса между поступлением и диссипацией энергии:

а – при ограниченных ресурсах источника энергии;

б – при нелинейном механизме диссипации.

Видно, что колебания будут нарастающими ($W'_1 > W_0$), если подводимая энергия перекрывает диссипацию, $\alpha^2 > \Lambda$, и затухающими ($W'_1 < W_0$), если темп подвода энергии недостаточен, $\alpha^2 < \Lambda$. И только в случае точного баланса, т.е. при $\alpha^2 = \Lambda$, амплитуда колебаний будет оставаться неизменной, равной первоначальной.³

Такой итог борьбы раскачки с диссипацией – следствие **линейности** обоих механизмов: и подводимая, и диссипируемая энергия пропорциональны квадрату амплитуды, так что “исход борьбы” определяют коэффициенты пропорциональности α^2 и Λ – который из них больше, тот механизм и “победил”. Но линейность, как мы видели в Лекции 1, – свойство колебаний малой амплитуды. Параметрически возбуждаемые системы устроены обычно так, что $\alpha^2 > \Lambda$, и колебания малой амплитуды нарастают в соответствии с (3.3). Но при достаточно большой амплитуде в игру вступают *нелинейные эффекты*, и именно они определяют дальнейший ход событий. Рассмотрим наиболее очевидные проявления нелинейности.

Возможности источника, питающего энергией колебательную систему, вообще говоря, ограничены, поэтому энергия ΔW , передаваемая системе за полпериода, не может расти неограниченно пропорционально A^2 (квадрату амплитуды), как того требует линейная теория. Начиная с некоторого значения амплитуды, рост ΔW замедляется, и, в конце концов, ΔW стремится к конечному пределу (рис. 14 а). Если диссипируемая за полпериода энергия по-прежнему пропорциональна A^2 , кривые $\Delta W(A)$ и $W_{\text{дисс}}(A)$ обязательно пересекутся в некоторой точке $A = A_0$. Здесь достигается баланс между поступлением энергии и ее потерями, и это значение и будет амплитудой установившихся колебаний. Легко видеть, что этот режим устойчив: отклонения вверх ($A > A_0$) или вниз ($A < A_0$) ведут к такому нарушению баланса, которое способствует восстановлению $A = A_0$.

Нелинейным может оказаться и механизм диссипации. Хорошо известно, что сопротивление проводника растет с температурой. Температура же тем выше, чем больше тепла выделяется в проводнике. Следовательно, R увеличивается с ростом амплитуды тока, и

³И получится не “раскачка”, а всего лишь “поддержание” колебаний.

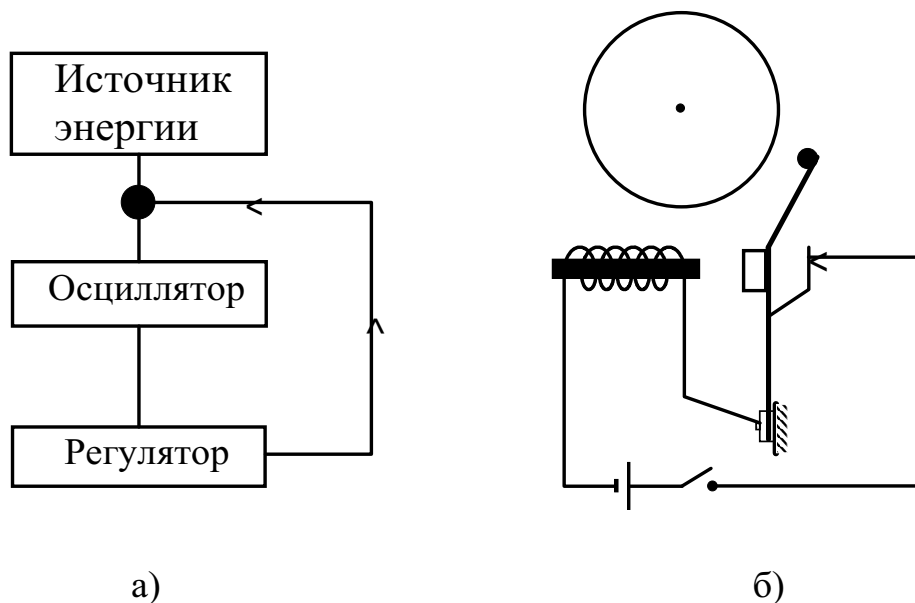


Рис. 15: а – функциональная схема автоколебательной системы осцилляторного типа; б – схема электрического звонка.

диссипативные потери растут быстрее, чем A^2 (рис. 14 б). В результате даже при квадратичной зависимости $\Delta W(A)$ (т.е. при неограниченных возможностях источника) кривая потерь пересечет кривую $\Delta W(A)$ в некоторой точке $A = A_0$, также соответствующей устойчивому режиму колебаний. Мы привели лишь два возможных механизма нелинейного ограничения роста колебаний. Они, очевидно, могут действовать порознь, вместе или в сочетании с другими факторами, но результат будет один – установятся колебания конечной амплитуды.

И в заключение еще одно замечание. В рассмотренном нами сценарии для раскачки колебаний с частотой f (периодом T) требовалось изменять параметры системы с удвоенной частотой $2f$ (C претерпевает полный цикл изменений за $T/2$). Это – наиболее эффективный, но не единственный способ. Согласно теории (см., например, [4]), параметры можно изменять и медленнее, с любым периодом, кратным $T/2$, $T_{\text{пар}} = nT/2$, $n = 1, 2, 3, \dots$, но чем больше n , тем менее эффективно раскачиваются колебания, и тем легче они подавляются диссипацией.

Автоколебания – очень важный и широко распространенный в природе и технике класс незатухающих колебаний. Автоколебания – это, например, свист тонкой ветки и гудение проводов под действием ветра, звучание человеческого голоса и голосов животных, периодические пульсации блеска, характерные для целого класса звезд – так называемых цефеид. Автоколебательными системами являются все духовые и смычковые музыкальные инструменты, часы, разнообразные электронные генераторы, в том числе – лазеры и мазеры, и многие другие устройства.

Для поддержания автоколебаний необходим источник энергии и/или вещества – в этом их сходство с вынужденными и параметрическими колебаниями. Принципиальное же отличие состоит в том, что параметры как самой автоколебательной системы, так и источника энергии *не зависят явно от времени*. Существование автоколебаний обусловлено *авторегулировкой* поступления (отвода) энергии и/или вещества в систему (из системы). Иными словами, автоколебательная система сама решает, когда и сколько взять у источника (или отдать во внешнюю среду). Важнейший признак автоколебаний – независимость их периода, формы и амплитуды от начальных условий. По структуре и принципу

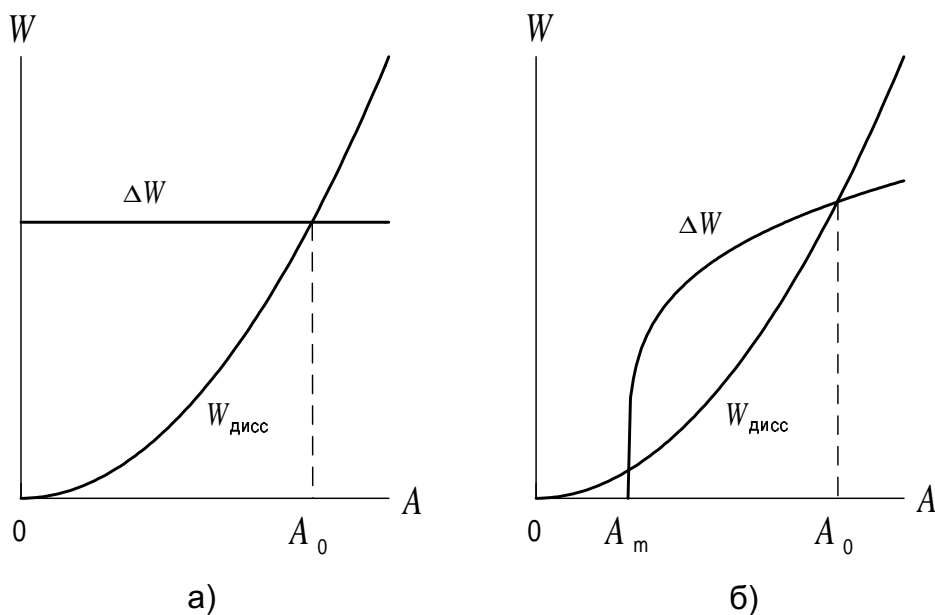


Рис. 16: Мягкий (а) и жесткий (б) режимы возбуждения автоколебаний.

действия автоколебательные системы удобно разделить на два типа – осцилляторные и накопительные.

Автоколебательные системы осцилляторного типа. Характерная структура такой системы схематически показана на рис. 15 а. Главный ее элемент – осциллятор, управляющий регулятором, который обеспечивает обратную связь с источником энергии, т.е. подвод энергии в нужный момент периода колебаний. Примером систем осцилляторного типа служат часы, скрипичная и виолончельная струны, крыло самолета в воздушном потоке, а также многие конструкции электронных генераторов колебаний.

Основные элементы автоколебательной системы осцилляторного типа и их взаимодействие удобно продемонстрировать на примере электрического звонка (рис. 15 б). Источником энергии служит батарея или электрическая сеть.⁴ Осциллятор – упругая металлическая пластина со стальным якорем и молоточком на конце – несет на себе подвижный контакт, который в положении покоя (при неподключенном напряжении) касается неподвижного контакта. При подключении напряжения цепь оказывается замкнутой, электромагнит притягивает укрепленный на упругой пластине якорь, контакты размыкаются, под действием упругой силы осциллятор возвращается в исходное положение, контакты замыкаются, и весь цикл повторяется снова. Тем самым возбуждаются незатухающие колебания, при которых, благодаря обратной связи (автоматическому замыканию и размыканию контактов в такт колебаниям), происходит подвод энергии в нужный момент периода.

Как правило, после начала действия (подключения) источника энергии автоколебательная система некоторое время работает в нестационарном режиме: происходит возбуждение (установление) колебаний, когда их амплитуда A растет (благодаря превышению поступления энергии за период, ΔW , над ее диссипацией $W_{\text{дисс}}$), пока не достигнет значения A_0 , при котором $\Delta W = W_{\text{дисс}}$. Если по каким-то причинам (скажем, вследствие слишком сильного начального толчка) A превысит A_0 , потери энергии на диссипацию будут больше, чем поступление, и амплитуда уменьшится до A_0 . Таким образом, установившаяся амплитуда колебаний A_0 не зависит от начальных условий.

Что касается самого процесса возбуждения автоколебаний, он может протекать по-разному, в зависимости от устройства системы. В простейшем случае ΔW не зависит

⁴То, что напряжение сети переменное, не имеет здесь никакого значения.

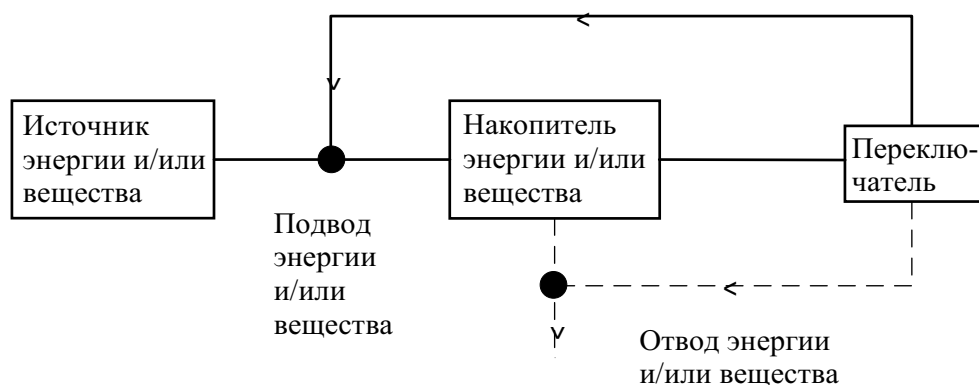


Рис. 17: Функциональная схема автоколебательной системы накопительного типа.

(или слабо зависит) от A (рис. 16 а), в то время как $W_{\text{дисс}}$ растет с A . При этом режим возбуждения автоколебаний *мягкий*: сколь угодно слабые начальные колебания осциллятора усиливаются (раскачиваются) до “рабочей” амплитуды A_0 . Но есть и такие автоколебательные системы, в которых начальные колебания осциллятора будут усиливаться только в том случае, если их амплитуда выше *порогового значения* A_m . Так будет, например, если для приведения регулятора в действие (т.е. для получения энергии от источника) требуется конечное усилие, которое могут обеспечить только колебания с достаточной амплитудой (рис. 16 б). Этот режим возбуждения автоколебаний называется *жестким*.

Наконец, *форма* установившихся автоколебаний также определяется устройством системы. Если осциллятор имеет высокую добротность, для поддержания его колебаний требуется очень небольшой подвод энергии за период (по сравнению с энергией, запасенной в колебаниях). При этом цепь обратной связи мало влияет на форму колебаний, и они очень близки к гармоническим. Так устроены механические часы, электронные генераторы синусоидальных напряжений, духовые и смычковые музыкальные инструменты и многие другие автоколебательные системы. Напротив, если подвод и диссипация энергии за период сравнимы с полной энергией колебаний, форма автоколебаний, как правило, сильно отличается от синусоидальной. Примером может служить тот же электрический звонок, осциллятор которого совершает колебания практически только в одну сторону от положения равновесия – к электромагниту.

Автоколебательные системы накопительного типа. Принципиальная схема показана на рис. 17. Место осциллятора здесь занимает накопитель, через который проходит поток энергии и/или вещества. Управляемый накопителем переключатель осуществляет обратную связь, регулируя либо подвод, либо отвод энергии (вещества), а в особых случаях – оба эти процесса. Механический вариант такой системы – гидравлический осциллятор (дозатор) – показан на рис. 18 а. Сосуд (накопитель) непрерывно наполняется водой до тех пор, пока при уровне воды H_2 встроенный в сосуд сифон (переключатель) не начнет действовать и не опорожнит сосуд до уровня $H = H_1$. При $H \leq H_1$ в сифон поступает воздух, опорожнение прекращается, и сосуд вновь начинает наполняться. Колебания уровня воды со временем имеют характерный для систем накопительного типа вид (рис. 18 б). Период колебаний разбит на две существенно различающиеся по длительности стадии – относительно продолжительную накопительную и краткую разгрузочную, при этом скорость сброса во много раз (порой на несколько порядков) превышает скорость накопления. Такие колебания принято называть *разрывными* (или *релаксационными*).

Простым примером электрической автоколебательной системы накопительного типа служит генератор пилообразного напряжения на неоновой лампе (рис. 19). При подключе-

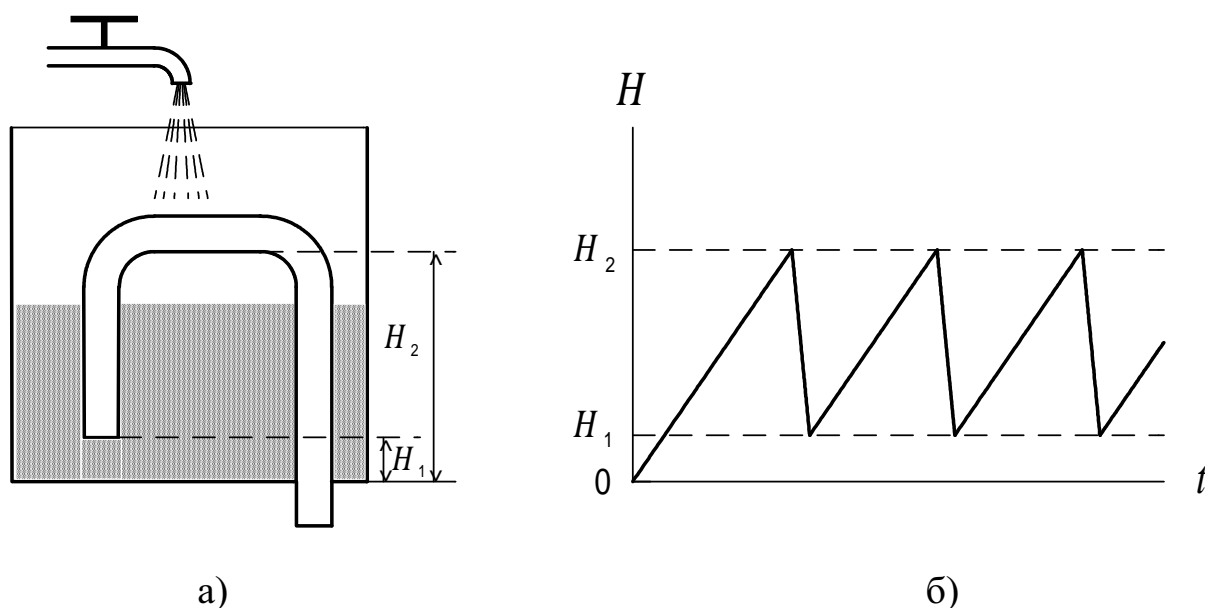


Рис. 18: Гидравлический осциллятор:

а – функциональная схема; б – зависимость уровня воды от времени.

нии источника напряжения U конденсатор заряжается через сопротивление R ,

$$U_C = U (1 - e^{-t/\tau}), \quad \tau = RC,$$

до тех пор, пока U_C не превысит напряжение зажигания неоновой лампы U_1 , после чего быстро разряжается через имеющую малое сопротивление лампу до так называемого напряжения затухания U_2 , при котором разряд в лампе прекращается. Затем конденсатор вновь заряжается от источника и т.д.

Автоколебательные системы накопительного типа также широко распространены в природе и технике. К ним относятся, в частности, гейзеры и различные генераторы импульсов, например, мультивибраторы. В заключение отметим, что деление автоколебательных систем на осцилляторные и накопительные достаточно условно. Между ними нет жесткой границы, и часто трудно сказать, какому типу больше соответствует конкретная система. Ведь любой осциллятор всегда состоит из накопителей,⁵ между которыми происходит обмен энергией. В случае низкой добротности осциллятора к нему при каждом колебании должна подводиться значительная энергия, сравнимая с полной энергией колебаний, и можно считать, что поток энергии управляется накопителем; по форме же такие колебания очень далеки от синусоидальных и похожи на разрывные.

Колебания систем с несколькими степенями свободы. До сих пор мы изучали колебания систем с одной степенью свободы, но далеко не всегда этого достаточно. Реальные системы имеют обычно большое число степеней свободы, и лишь в редких случаях в интересующие нас процессы основной вклад вносит только одна из них. Необходимо поэтому представлять себе, хотя бы на качественном уровне, основные отличительные черты поведения колебательных систем с *несколькими* степенями свободы. Изучим этот вопрос на примере двух связанных осцилляторов.

Собственные колебания. Простейшая механическая модель такого рода – две массы, m_1 и m_2 , на пружинах жесткости k_1 и k_2 , связанные между собой третьей пружиной жесткости K (рис. 20 а). Система имеет две степени свободы: для задания ее состояния нужны

⁵ Скажем, накопителя электрической энергии – конденсатора и накопителя магнитной энергии – катушки индуктивности.

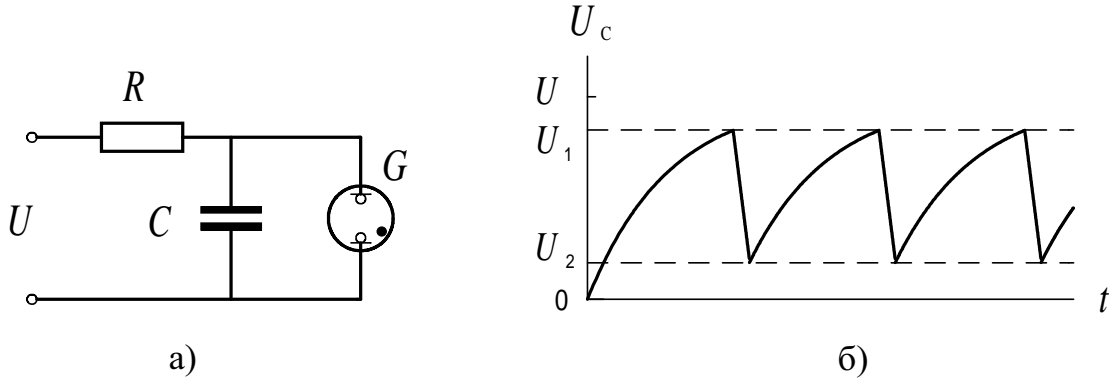


Рис. 19: Генератор пилообразного напряжения на неоновой лампе.

две координаты и две скорости – положение (относительно равновесия) левой массы x_1 и правой x_2 и их скорости. Предположим сначала, что $m_1 = m_2 = m$ и $k_1 = k_2 = k$, и попробуем качественно проанализировать возможные колебания такой системы.

Не будь третьей пружины, каждая масса совершала бы гармонические колебания с одной и той же частотой $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Если мы в начальный момент отклоним обе массы в одну сторону (скажем, влево) на одну и ту же величину (т.е. $x_{10} = x_{20} = -A$) и отпустим, они будут колебаться синхронно с амплитудой A , сохраняя расстояние между собой, т.е. *не деформируя* среднюю пружину, а значит так, как будто этой пружины нет – с частотой $\omega_1 = \omega_0$. Это один тип (или *мода*) колебаний. Теперь отклоним массы в разные стороны (скажем, левую влево, а правую вправо) на одну и ту же величину (т.е. $x_{20} = -x_{10} = A$) и отпустим. Массы, очевидно, будут колебаться, совершая симметричные движения амплитуды A навстречу друг другу. При этом все время $x_2 = -x_1$, т.е. если крайние пружины сжаты на x , то средняя растянута на $2x$ (по x в каждую сторону), и они действуют на каждую из масс с силой $kx + 2Kx$. Легко сообразить, что частота колебаний при этом будет $\omega_2 = \sqrt{(k + 2K)/m} > \omega_0$. Это – другая мода колебаний. Обе они симметричны (поскольку симметрична сама система) и реализуются при симметричных начальных условиях, но симметрии эти разные: в первом случае массы движутся в фазе (обе в одну сторону), а во втором – в противофазе (в противоположные стороны). Нетрудно понять, что при произвольных начальных условиях колебание каждой из масс будет суперпозицией мод, т.е. колебаний первого и второго типа.

Теперь обратимся к уравнениям. Если массы находятся в положениях x_1 и x_2 , то левая пружина растянута на x_1 , правая – сжата на x_2 , средняя – растянута на $(x_2 - x_1)$. Таким образом,

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k x_1 + K(x_2 - x_1),$$

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k x_2 - K(x_2 - x_1).$$

Складывая и вычитая эти уравнения, получим

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 s_1}{dt^2} &= -k s_1, & s_1 &= x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), & \omega_1^2 &= \frac{k}{m} = \omega_0^2; \\ m \frac{d^2 s_2}{dt^2} &= -(k + 2K) s_2, & s_2 &= x_2 - x_1 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), & \omega_2^2 &= \frac{k + 2K}{m}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Переменные s_1 и s_2 называются *нормальными координатами*, а соответствующие им частоты ω_1 и ω_2 – *нормальными* (или *собственными*) частотами колебательной системы. Мо-

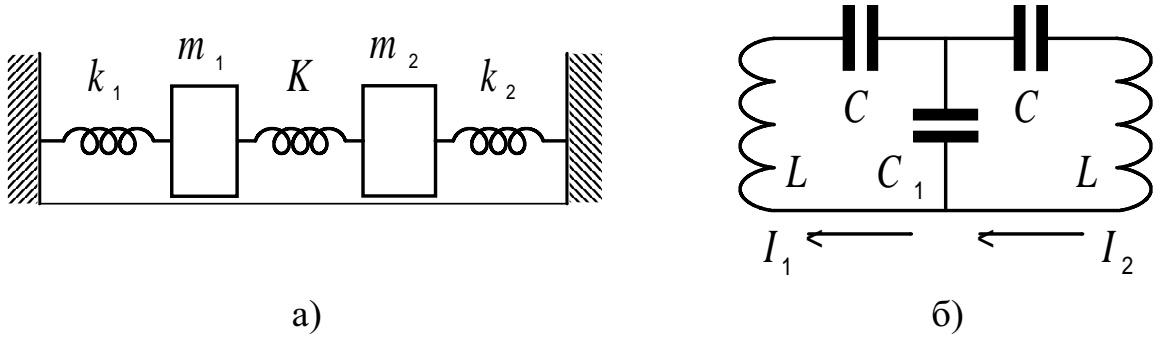


Рис. 20: Колебательные системы с двумя степенями свободы:

а – связанные пружинные маятники; б – связанные колебательные контуры.

дой называется колебание системы на одной из собственных частот. При этом колеблется только соответствующая нормальная координата, а остальные нормальные координаты постоянны (равны нулю).

Первая мода рассматриваемой системы – это колебание s_1 с частотой ω_1 при $s_2 = 0$; движение масс в этом случае синфазное:

$$x_2 = x_1 = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1).$$

Вторая мода – это колебание s_2 с частотой ω_2 при $s_1 = 0$, движение масс в ней противофазное:

$$x_2 = -x_1 = \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

При произвольных начальных условиях возбуждаются обе моды, и

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{s_1 - s_2}{2} = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ x_2 &= \frac{s_1 + s_2}{2} = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Таким образом, вычисления полностью подтверждают приведенные ранее качественные рассуждения.

Электрическим аналогом рассмотренной системы служат два связанных колебательных контура (рис. 20б). Это – тоже симметричная система, и у нее также есть две симметричные моды колебаний: “синфазная”, когда $I_1 = I_2$, ток течет “мимо” конденсатора C_1 и частота колебаний равна $\omega_1 = 1/\sqrt{LC}$, и “противофазная”, когда $I_1 = -I_2$, конденсатор C_1 заряжается удвоенным током, а частота колебаний равна $\omega_2 = \sqrt{1/(LC) + 2/(LC_1)}$. В общем же случае колебания этих связанных контуров представляют собой, очевидно, суперпозицию (сумму) обеих мод.

В качестве примера такой суперпозиции рассмотрим случай, когда амплитуды мод одинаковы, $A_1 = A_2 = A$, и положим, для простоты, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Тогда решение (3.5) принимает вид (см. формулы (П10) Приложения):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = A \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \\ x_2 &= \frac{A}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = A \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \end{aligned}$$

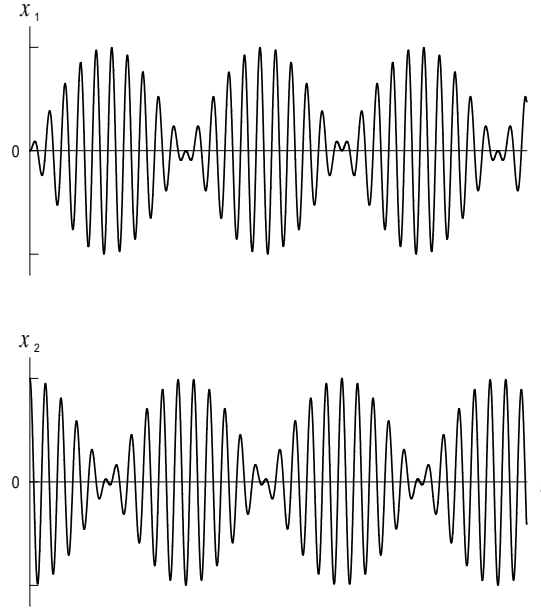


Рис. 21: Биения.

Если нормальные частоты близки, т.е. $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$ и $\Delta\omega \ll \omega_1$,⁶ колебания системы протекают в очень интересном режиме, называемом *биениями* (рис. 21). Каждая масса совершает колебания “высокой” частоты $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$, *модулированные* колебанием разностной (“низкой”) частоты $\Delta\omega$, причем модуляции x_1 и x_2 сдвинуты по фазе так, что энергия колебаний как бы перетекает от одной массы к другой: когда первая останавливается, вторая колеблется с максимальной амплитудой, и наоборот. Такие же биения наблюдаются и в связанных контурах: колебания токов I_1 и I_2 попеременно то нарастают, то убывают до нуля.

Откажемся теперь от предположения о симметрии, и пусть все массы и пружины на рис. 20 а – разные. Тогда уравнения их движения таковы:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -k_1 x_1 + K(x_2 - x_1), & \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \nu_1^2 x_1 &= a_{12} x_2, \\ & \text{или} & & \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -k_2 x_2 - K(x_2 - x_1), & \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \nu_2^2 x_2 &= a_{21} x_1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Входящие в (3.6) коэффициенты $a_{12} = K/m_1$ и $a_{21} = K/m_2$ называются *коэффициентами связи*,⁷ а $\nu_1 = \sqrt{(k_1 + K)/m_1}$ и $\nu_2 = \sqrt{(k_2 + K)/m_2}$ – *парциальными частотами*, это частоты колебаний системы в тех случаях, когда одна из масс закреплена (т.е., соответственно, $x_2 = 0$ или $x_1 = 0$). Ищем решение в виде $x_{1,2} = X_{1,2} e^{j\omega t}$ и получаем систему алгебраических уравнений, которую удобно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \nu_1^2 & -a_{12} \\ -a_{21} & \nu_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Нормальные частоты являются *собственными значениями* ω^2 матрицы, стоящей в левой части (3.7), а нормальные координаты – соответствующими им *собственными векторами* (см., например, [5]). Для их практического вычисления необходимо приравнять нулю

⁶Для этого необходимо $K \ll k$ (рис. 20 а) или $C_2 \gg C$ (рис. 20 б).

⁷Подчеркнем, что $m_1 a_{12} = m_2 a_{21}$, как следствие **третьего закона Ньютона** (“действие равно противодействию”). Поскольку это – один из самых общих законов природы, коэффициенты связи в **любых** колебательных системах удовлетворяют соотношениям такого рода.

определитель системы (3.7),

$$\begin{vmatrix} \nu_1^2 - \omega^2 & -a_{12} \\ -a_{21} & \nu_2^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = (\omega^2 - \nu_1^2)(\omega^2 - \nu_2^2) - a_{12}a_{21} = 0,$$

и решить получившееся уравнение:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\nu_1^2 + \nu_2^2 \mp \sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4a_{12}a_{21}} \right]. \quad (3.8)$$

Нормальные координаты s_1 и s_2 удовлетворяют, очевидно, системе уравнений

$$\begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, с исходными координатами x_1 и x_2 их связывает преобразование

$$s_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2, \quad s_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2,$$

приводящее матрицу системы (3.7) к диагональному виду (см. [5]).

Если число степеней свободы колебательной системы $N \geq 2$, процедура нахождения нормальных частот и нормальных координат аналогична. Такая система описывается N дифференциальными уравнениями вида (3.6), подстановка $x_i = X_i e^{j\omega t}$ приводит их к системе N алгебраических уравнений вида (3.7), собственные значения и собственные векторы которой и есть нормальные частоты и нормальные координаты. Для отыскания нормальных частот необходимо приравнять нулю определитель системы, что дает уравнение N -й степени относительно ω^2 , имеющее N решений. Таким образом, колебательная система с N степенями свободы имеет N собственных частот, т.е. N мод колебаний.⁸

Вынужденные колебания. Рассмотрим теперь колебания системы (3.6) под действием внешних периодических сил:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k_1 x_1 - K(x_2 - x_1) &= F_1 e^{j\omega t}, & \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \nu_1^2 x_1 - \frac{K}{m_1} x_2 &= \frac{F_1}{m_1} e^{j\omega t}, \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k_2 x_2 + K(x_2 - x_1) &= F_2 e^{j\omega t}, & \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \nu_2^2 x_2 - \frac{K}{m_2} x_1 &= \frac{F_2}{m_2} e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

или

Подставляя $x_{1,2} = X_{1,2} e^{j\omega t}$, получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (\nu_1^2 - \omega^2) X_1 - \frac{K}{m_1} X_2 &= \frac{F_1}{m_1}, \\ -\frac{K}{m_2} X_1 + (\nu_2^2 - \omega^2) X_2 &= \frac{F_2}{m_2}, \end{aligned}$$

⁸Некоторые из этих частот могут оказаться одинаковыми, но все равно они соответствуют **разным** модам колебаний. Например, математический маятник с одинаковой частотой колеблется и в направлении север-юг, и в направлении восток-запад, но это два **независимых** движения и, соответственно, две разные моды колебаний.

решение которой легко находится по правилу Крамера (см. [5]). Рассмотрим сперва случай, когда сила действует только на первую подсистему ($F_2 = 0$). Тогда

$$X_1 = \frac{F_1}{m_1} \frac{\nu_2^2 - \omega^2}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}, \quad X_2 = \frac{F_1 K / (m_1 m_2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}, \quad (3.9)$$

где нормальные частоты ω_1 и ω_2 определяются уравнением (3.8). Если же сила действует только на вторую подсистему ($F_1 = 0$), решение получается из (3.9) перестановкой индексов 1 и 2:

$$X_1 = \frac{F_2 K / (m_1 m_2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}, \quad X_2 = \frac{F_2}{m_2} \frac{\nu_1^2 - \omega^2}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}. \quad (3.10)$$

В общем случае ($F_1 \neq 0$, $F_2 \neq 0$) амплитуды X_1 и X_2 колебаний подсистем равны сумме вкладов (3.9) и (3.10).

О чем же говорят нам эти формулы? Во-первых, видно, что если частота вынуждающей силы (не важно, F_1 или F_2) равна одной из нормальных частот колебательной системы, ω_1 или ω_2 , наступает резонанс – амплитуды X_1 и X_2 колебаний обеих подсистем неограниченно (так как мы не учли диссипацию) растут. Во-вторых, единичная сила $F_1 = 1$, приложенная к подсистеме 1, вызывает в подсистеме 2 точно такой же отклик, какой вызывает в подсистеме 1 единичная сила $F_2 = 1$, приложенная к подсистеме 2, – это знаменитая *теорема взаимности*. Наконец, в-третьих, если, скажем, сила F_1 , приложенная к подсистеме 1, имеет частоту, равную *парциальной частоте ν_2 подсистемы 2*, она вызывает колебания **только** подсистемы 2, первая же подсистема остается в покое, $X_1 = 0$! Объясняется это тем, что при $\omega = \nu_2$ внешняя сила F_1 и подсистема 2 оказывают на подсистему 1 равные и противоположно направленные воздействия, которые в точности уравновешивают друг друга.

Это удивительное явление *динамического демпфирования* (или *успокоения*) имеет многочисленные применения. Например, в радиотехнике на нем основано действие фильтра-пробки (или отсасывающего контура): благодаря связи второго контура с первым, на который действует внешнее возмущение, при соответствующей настройке можно добиться того, что одна определенная частота в первом контуре не будет появляться совсем. Но самое, пожалуй, эффектное приложение динамического демпфирования – это успокоитель качки судов. Подсистемами служат корабль и вода в специальном резервуаре – так называемых цистернах Фрама, а внешней силой – морское волнение. Парциальная частота колебаний воды в цистернах подбирается близкой к частоте качки, при этом вода в цистернах колеблется очень сильно, а качка корабля заметно ослабевает.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Комплексные числа.

Понятие числа возникло в глубокой древности и развивалось в соответствии с потребностями практики вычислений и внутренней логикой математической науки. Простой счет привел к понятию натурального числа. Для беспрепятственного совершения четырех арифметических действий потребовалось множество рациональных чисел, сравнение длин отрезков в простейших геометрических фигурах привело к иррациональным числам, объединение которых с рациональными дало множество вещественных чисел. Но оказалось, что для решения алгебраических уравнений, даже весьма простых, вещественных чисел не хватает. Так, например, уравнение $x^2 + 1 = 0$ вещественных решений не имеет. Комплексные числа – это минимальное расширение множества вещественных чисел, позволяющее решать все алгебраические уравнения.

Определение. Множество упорядоченных пар¹ вещественных чисел (a, b) , на котором определено отношение равенства:

$(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$, – и операции сложения и умножения:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \quad (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1), \quad - \quad (\text{П1})$$

называется множеством комплексных чисел $z = (a, b)$. Вещественные числа a и b называются *вещественной* и *мнимой* частями комплексного числа z :

$$z = (a, b); \quad a = \operatorname{Re}(z), \quad b = \operatorname{Im}(z). \quad (\text{П2})$$

Свойства (z_1, z_2, z_3 – произвольные комплексные числа)

- 1) перестановочный закон: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;
- 2) сочетательный закон: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \quad z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$;
- 3) распределительный закон: $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$;
- 4) *комплексный ноль* $Z_N = (0, 0)$ и *комплексная единица* $Z_E = (1, 0)$ – единственные комплексные числа такие, что для любого $z = (a, b)$

$$z + Z_N = z, \quad z \cdot Z_N = Z_N = (0, 0), \quad z \cdot Z_E = z;$$

- 5) каждому числу $z = (a, b) \neq Z_N$ соответствуют единственные числа $z_- = (-a, -b)$ и $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$ такие, что $z + z_- = Z_N = (0, 0)$ и $z \cdot z^{-1} = Z_E = (1, 0)$;

очевидно, что $Z_{N-} = Z_N$ и $Z_E^{-1} = Z_E$;

- 6) вычитание и деление ($z = (a, b) \neq Z_N$ и $z_1 = (a_1, b_1)$):

$$z_1 - z = z_1 + z_- = (a_1 - a, b_1 - b), \quad \frac{z_1}{z} = z_1 \cdot z^{-1} = \left(\frac{a a_1 + b b_1}{a^2 + b^2}, \frac{a b_1 - a_1 b}{a^2 + b^2} \right); \quad (\text{П3})$$

- 7) при умножении $z = (a, b)$ на число вида $(A, 0)$ вещественная и мнимая части изменяются пропорционально: $(a, b) \cdot (A, 0) = (Aa, Ab)$;

- 8) арифметические действия с числами вида $(a, 0)$ приводят к числам того же вида:

$$(a_1, 0) \pm (a_2, 0) = (a_1 \pm a_2, 0), \quad (a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = (a_1 \cdot a_2, 0), \quad \frac{(a_1, 0)}{(a_2, 0)} = \left(\frac{a_1}{a_2}, 0 \right),$$

¹ Важен порядок следования чисел: (a, b) и (b, a) – разные пары.

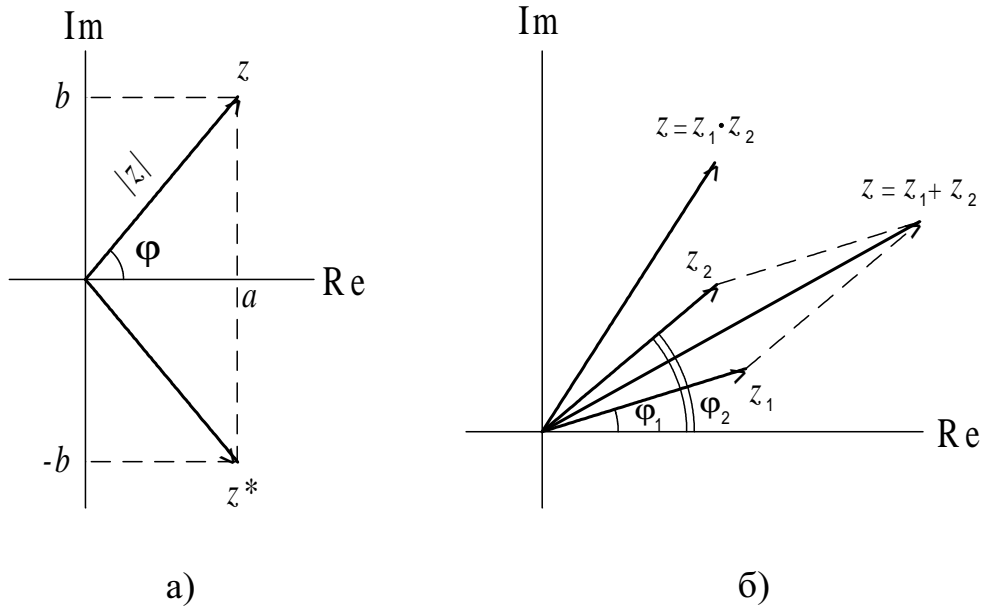


Рис. 22: Геометрическое представление комплексных чисел:

а – изображение числа на комплексной плоскости; б – сложение и умножение чисел.

и производятся фактически по правилам действий с вещественными числами.

Благодаря последнему свойству можно включить вещественные числа в множество комплексных, если рассматривать вещественное число a как комплексное: $a = (a, 0)$. При этом, очевидно, $0 = Z_N$, $1 = Z_E$. В свою очередь, комплексные числа вида $(0, b)$ называются *чисто мнимыми* и могут быть представлены в виде $(0, b) = jb$, где $j = (0, 1)$ – *мнимая единица*. В соответствии с правилом умножения (П1)

$$j^2 = j \cdot j = (-1, 0) = -1. \quad (\text{П4})$$

Следовательно, упомянутое выше уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет два комплексных корня: $x_1 = j = (0, 1)$ и $x_2 = -j = (0, -1)$.

В результате мы приходим к так называемой *алгебраической форме* записи комплексных чисел:

$$z = (a, b) = a + jb,$$

позволяющей проводить арифметические действия с комплексными числами по обычным правилам алгебры многочленов.

Определение. Комплексное число $z^* = a - jb$ называется *комплексно сопряженным* числу $z = a + jb$.

Легко видеть, что сумма и произведение комплексно сопряженных чисел вещественны: $z + z^* = 2a$, $z \cdot z^* = a^2 + b^2$.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Очень удобно и наглядно представлять комплексное число $z = a + jb$ точкой на плоскости (x, y) с декартовыми координатами $x = a$, $y = b$, а еще лучше – вектором, соединяющим начало координат с этой точкой (рис. П1 а). Такая плоскость называется *комплексной плоскостью*, ось x – *вещественной*, а ось y – *мнимой* осью (часто их обозначают Re и Im соответственно), а вектор – *изображающим вектором*.

Длина $|z|$ изображающего вектора называется *модулем*, а угол φ между ним и вещественной осью x – *аргументом* комплексного числа z :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \text{Arg } z, \quad \text{tg } \varphi = \frac{b}{a}. \quad (\text{П5})$$

Используя связь декартовых координат с полярными, $x = |z| \cos \varphi$, $y = |z| \sin \varphi$, приходим к *тригонометрической форме* записи комплексных чисел:

$$z = |z| (\cos \varphi + j \sin \varphi). \quad (\text{П6})$$

Заметим, что $\text{Arg } z$ определен неоднозначно, к нему можно прибавить любое число вида $2\pi n$, где n – целое. Во многих случаях удобно обозначить через $\arg z$ то значение $\text{Arg } z$, которое заключено в пределах $\varphi_0 \leq \varphi < 2\pi + \varphi_0$, где φ_0 – некоторое фиксированное число (чаще всего выбирают $\varphi_0 = 0$ или $\varphi_0 = -\pi$). Тогда $\text{Arg } z = \arg z + 2\pi k$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Аргумент комплексного нуля Z_N вообще не определен, а его модуль $|Z_N| = 0$. Легко убедиться, что два не равных нулю комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы или равны, или отличаются на $2\pi n$. Комплексно сопряженные числа имеют одинаковые модули, а значения их аргументов (при должном выборе областей их изменения) отличаются знаком (рис. П1 а).

Сложение комплексных чисел, как видно из правила (П1), сводится к сложению изображающих векторов (рис. П1 б). Чтобы получить геометрическую интерпретацию правила умножения, используем тригонометрическую форму записи (П6):

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) \cdot |z_2| (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) = \\ &= |z_1| |z_2| [\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + j (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)] = \\ &= |z_1| |z_2| [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Таким образом, модуль произведения равен произведению модулей, а аргумент – сумме аргументов сомножителей. Аналогично, модуль частного равен частному модулей, а аргумент – разности аргументов делимого и делителя (рис. П1 б):

$$z_1 : z_2 = |z_1| / |z_2| [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \quad (\text{П7})$$

Это правило позволяет определить степенную функцию z^n комплексного аргумента при целых n :

$$z^n = |z|^n [\cos(n\varphi) + j \sin(n\varphi)].$$

Для других функций (тригонометрических, показательной, логарифмической и др.) переход к комплексному аргументу осуществляется с помощью рядов Тейлора. Каждая такая функция $f(x)$ вещественного аргумента x разложима (в некоторой области) в ряд Тейлора. По определению, функция $f(z)$ комплексного аргумента z задается тем же самым рядом (но уже по степеням z) в той области комплексной плоскости, где этот ряд сходится.² Например, экспонента,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{и} \quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

причем первый ряд сходится на всей вещественной прямой, а второй – на всей комплексной плоскости. Полагая $z = jx$ и разделяя вещественную и мнимую части, получаем знаменитую *формулу Эйлера*:

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x, \quad (\text{П8})$$

²Более строго и подробно этот вопрос излагается в любом учебнике по теории функций комплексной переменной, например, в [8].

с помощью которой приходим к третьей, *показательной форме* записи комплексных чисел:

$$z = |z| e^{j\varphi}. \quad (\text{П9})$$

Интересно отметить, что правила умножения и деления (П7) прямо следуют из известного свойства показательной функции: $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.

Все три формы записи комплексных чисел – алгебраическая, тригонометрическая и показательная – совершенно эквивалентны, но каждая имеет свои достоинства, и выбор той или иной из них определяется соображениями удобства.

2. Периодические функции.

Периодические функции играют важную роль в теории колебаний и волн. Именно с ними связаны такие основополагающие понятия как период колебаний, период и длина волны.

Определение. Функция $f(t)$, определенная на всей вещественной оси t , называется *периодической с периодом T* , если при любом t $f(t+T) = f(t)$.

Если функция имеет период T , то, очевидно, кратные ему интервалы $2T, 3T, \dots, nT, \dots$ – тоже ее периоды. Нетрудно доказать, что у всякой периодической кусочно непрерывной функции, не равной тождественно постоянной,³ есть *минимальный период* $T_0 > 0$, а все остальные периоды ему кратны. Именно T_0 обычно и имеют в виду, говоря о периоде.

Самые известные периодические функции – это тригонометрические функции. Из них $\sin x$ и $\cos x$ имеют (минимальный) период 2π , а $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ – период π :

$$\sin(x+2\pi) = \sin x, \quad \cos(x+2\pi) = \cos x, \quad \operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x.$$

Функция $\cos x$ – четная ($\cos(-x) = \cos x$), а остальные – нечетные ($f(-x) = -f(x)$). Следует иметь в виду, что, согласно формуле Эйлера (П8), e^{jx} – периодическая функция с периодом 2π .

Основные формулы преобразования тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, & \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y; \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{y-x}{2}, & \cos x \cos y &= \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)], \\ \cos x - \cos y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}, & \sin x \sin y &= \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)], \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, & \sin x \cos y &= \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)], \end{aligned} \quad (\text{П10})$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x,$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x;$$

$$A \cos x + B \sin x = C \cos(x + \alpha), \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{B}{A}.$$

³Если $f(t) = \text{const}$, то для нее любое число T – период.

3. Ряд и интеграл Фурье.

В физике и технике довольно часто приходится иметь дело с векторами. Как правило, гораздо удобнее работать не с самими векторами, а с их *координатами* – коэффициентами разложения вектора по подходящему *базису*. Точно так же можно поступать и с функциями: разложить нужную функцию $f(x)$, т.е. представить ее в виде линейной комбинации *базисных функций* $g_0(x), g_1(x), \dots, g_n(x), \dots$,

$$f(x) = A_0 g_0(x) + A_1 g_1(x) + \dots + A_n g_n(x) + \dots,$$

и работать далее с коэффициентами $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$. Существенное отличие от векторов лишь в том, что набор базисных функций с необходимостью бесконечен.⁴

Хорошо известный пример такого разложения – ряд Тейлора,

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!},$$

где в качестве базисных взяты функции

$$g_0 = 1, \quad g_1 = x - x_0, \quad g_2 = \frac{(x - x_0)^2}{2}, \quad \dots, \quad g_n = \frac{(x - x_0)^n}{n!}, \quad \dots,$$

а коэффициенты разложения равны производным (соответствующего порядка) $f(x)$ в точке $x = x_0$. Можно использовать и другие наборы базисных функций (как и в случае с векторами, число базисов бесконечно). Выбор того или иного набора диктуется спецификой решаемой задачи и соображениями удобства.

Один из самых известных и широко используемых базисов – тригонометрический, составленный из синусов и косинусов. В курсе математики (см., например, [9]) доказывается **Теорема 1.** Если функция $f(t)$ определена и кусочно непрерывна на отрезке $[a, b]$, она разлагается в *ряд Фурье*:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)], \quad a \leq t \leq b, \quad (\text{П11})$$

где

$$A_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b dt f(t) \cos(n\omega t), \quad B_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b dt f(t) \sin(n\omega t); \quad \omega = \frac{2\pi}{b-a}. \quad (\text{П12})$$

Примечание. В точках непрерывности функции ряд сходится к $f(t)$, а в точках разрыва – к $[f(t+0) + f(t-0)]/2$. В частности, в $t = a$ и $t = b$ ряд сходится к $[f(a) + f(b)]/2$.

Разложение функции в ряд Фурье часто называют *спектральным разложением*, а набор чисел $\omega, 2\omega, \dots, n\omega, \dots$ – *спектром* функции $f(t)$. В некоторых случаях удобнее работать с *комплексным рядом Фурье*, к которому легко перейти от (П11) и (П12) с помощью соотношений

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{jx} + e^{-jx}), \quad \sin x = -\frac{j}{2} (e^{jx} - e^{-jx}), \quad (\text{П13})$$

⁴С помощью конечного набора базисных функций можно воспроизвести значения $f(x)$ только в конечном числе точек x_0, x_1, x_2, \dots

следующих из формулы Эйлера (П8). А именно,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega t}; \quad C_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b dt f(t) e^{-jn\omega t}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{П14})$$

Ряды (П11) и (П14) эквивалентны друг другу и обладают одними и теми же свойствами.

Периодическое продолжение $f(t)$. По условию Теоремы 1 $f(t)$ определена на отрезке $[a, b]$, в то время как входящие в ряд Фурье синусы и косинусы определены на всей вещественной прямой t . Посмотрим, к какой функции сходится ряд Фурье вне отрезка $[a, b]$. Синус и косинус – 2π -периодические функции, поэтому ряд Фурье (П11) сходится к периодической функции с периодом $T = b - a$ (совпадающей с $f(t)$ на отрезке $[a, b]$). Действительно, при любом n аргумент синуса и косинуса

$$n\omega(t + T) = n\omega t + \frac{2\pi n}{b-a} (b-a) = n\omega t + 2\pi n.$$

Таким образом, ряд Фурье *периодически продолжает* $f(t)$ на всю вещественную ось. Ввиду этого можно дать другую формулировку Теоремы 1:

Теорема 2. Если $f(t)$ – кусочно непрерывная периодическая функция с периодом T , то она разлагается в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)], \quad (\text{П15})$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} dt f(t) \cos(n\omega t), \quad B_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} dt f(t) \sin(n\omega t); \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Примечание. Легко убедиться, что ввиду периодичности $f(t)$ начало интегрирования, $t = a$, можно выбирать произвольно. Обычно полагают $a = -T/2$, тогда ясно видно, что в разложении четных функций присутствуют только косинусы ($B_n = 0$), а в разложении нечетных – только синусы ($A_n = 0$).

Спектральное разложение непериодических функций. Непериодическую функцию можно рассматривать как периодическую с очень большим периодом. Положим в (П14) $a = -T/2$, $b = T/2$ и рассмотрим предел $T \rightarrow \infty$. Обозначим $n\omega = \Omega_n$, $\omega = \Delta\Omega$ и $F(\Omega_n) = C_n/\omega$. Тогда

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\Omega_n) e^{j\Omega_n t} \Delta\Omega; \quad F(\Omega_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) e^{-j\Omega_n t}.$$

Полагая $T \rightarrow \infty$, видим, что $\Delta\Omega = 2\pi/T \rightarrow 0$, так что ряд (имеющий вид интегральной суммы) переходит в интеграл и

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega F(\Omega) e^{j\Omega t}, \quad F(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{-j\Omega t}. \quad (\text{П16})$$

Мы вывели формулы *преобразования Фурье* непериодической функции, или, иными словами, разложения $f(t)$ в *интеграл Фурье*. По сложившейся традиции второе соотношение (П16) называется *прямым*, а первое – *обратным* преобразованием Фурье. Функция $F(\Omega)$

называется *спектральной плотностью* функции $f(t)$. Функции $f(t)$ и $F(\Omega)$ взаимосвязаны: с помощью (П16) по любой из них можно вычислить другую; будем обозначать эту взаимосвязь так: $f(t) \leftrightarrow F(\Omega)$. Следует, однако, помнить, что в интеграл Фурье можно разложить не всякую функцию. Можно доказать (см., например, [9]), что для этого достаточно *абсолютной интегрируемости* $f(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)| < \infty.$$

Свойства преобразования Фурье. Пусть $f(t) \leftrightarrow F(\Omega)$, $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\Omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\Omega)$.

1) **Линейность.** Если $f(t) = C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$, где C_1 и C_2 – постоянные, то

$$F(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt [C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] e^{-j\Omega t} = C_1 F_1(\Omega) + C_2 F_2(\Omega).$$

Аналогичным свойством обладают и коэффициенты ряда Фурье (П11) и (П14).

2) **Дифференцирование и интегрирование.** Если

$$f_2(t) = \frac{d}{dt} f_1(t) \quad \text{и, соответственно,} \quad f_1(t) = \int dt f_2(t), \quad \text{то}$$

$$f_2(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega F_1(\Omega) e^{j\Omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega j\Omega F_1(\Omega) e^{j\Omega t},$$

так что

$$F_2(\Omega) = j\Omega F_1(\Omega) \quad \text{и} \quad F_1(\Omega) = \frac{1}{j\Omega} F_2(\Omega).$$

Иначе говоря, в спектральном представлении оператор дифференцирования равен $j\Omega$, а оператор интегрирования равен $1/(j\Omega)$.

3) **Спектральная плотность вещественной функции.** С помощью формулы Эйлера (П8) спектральную плотность функции $f(t)$ можно записать так:

$$F(\pm\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{\mp j\Omega t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) (\cos \Omega t \mp j \sin \Omega t) \equiv F_c(\Omega) \mp j F_s(\Omega).$$

Если $f(t)$ – вещественная функция, то функции $F_c(\Omega)$ и $F_s(\Omega)$ – тоже вещественные, следовательно

$$F(-\Omega) = F^*(\Omega),$$

т.е. $\text{Re } F(\Omega) = F_c(\Omega)$ – четная, а $\text{Im } F(\Omega) = F_s(\Omega)$ – нечетная функция Ω . Таким же свойством обладают и коэффициенты ряда Фурье (П14):

$$C_{-n} = C_n^*, \quad \text{если} \quad f(t) \quad \text{–} \quad \text{вещественная.}$$

4) **Запаздывание аргумента.** Если $f_1(t) = f(t - t_0)$, то

$$F_1(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t - t_0) \exp[-j\Omega(t - t_0 + t_0)] = F(\Omega) e^{-j\Omega t_0}.$$

5) **Изменение масштаба измерения аргумента.** Если $f_1(t) = f(kt)$, то

$$F_1(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(kt) e^{-j\Omega t} = \frac{1}{2\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} d(kt) f(kt) \exp \left[-j \frac{\Omega}{k} (kt) \right] = \frac{1}{k} F \left(\frac{\Omega}{k} \right).$$

6) **Спектральная плотность произведения функций.** Если $f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$, то

$$\begin{aligned} F(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f_1(t) f_2(t) e^{-j\Omega t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f_2(t) \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega_1 F_1(\Omega_1) \exp[-j(\Omega - \Omega_1)t] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega_1 F_1(\Omega_1) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f_2(t) \exp[-j(\Omega - \Omega_1)t] = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega_1 F_1(\Omega_1) F_2(\Omega - \Omega_1). \end{aligned}$$

Таким образом, спектральная плотность *произведения* функций равна *свертке* их спектральных плотностей:

$$\text{если } f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t), \quad \text{то } F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega_1 F_1(\Omega_1) F_2(\Omega - \Omega_1).$$

Аналогично, спектральная плотность *свертки* функций равна *произведению* их спектральных плотностей, умноженному на 2π :

$$\text{если } f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau f_1(\tau) f_2(t - \tau), \quad \text{то } F(\Omega) = 2\pi F_1(\Omega) \cdot F_2(\Omega).$$

Широкое применение рядов и интегралов Фурье обусловлено, в первую очередь, свойствами 1, 2 и 4. При любых *линейных* преобразованиях (сложении, умножении на число, дифференцировании, интегрировании, запаздывании аргумента) синус остается синусом *той же частоты*, меняются только амплитуда и фаза. Благодаря свойству 2 *дифференциальные и интегральные уравнения*, связывающие между собой воздействие и отклик системы на него, превращаются в *алгебраические*, что существенно облегчает их решение. Вычислив спектральную плотность (коэффициенты ряда Фурье) отклика, можно восстановить этот отклик как функцию времени и изучить его свойства. Существуют многочисленные таблицы преобразования Фурье (например, [10]), которые существенно облегчают эту работу. Примером использования спектрального анализа служит исследование вынужденных колебаний в Лекции 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980.
2. Савельев И.В. Курс общей физики, т. 1 и 2. М.: Наука, 1986, 1988.
3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
4. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. М.: Физматлит, 2001.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Наука, 1974.
- 6.

- 7.
8. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1979.
9. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч. II. М.: Наука, 1980.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований, т. 1. М.: Наука, 1969.