13.2.1. Определение нечеткой импликации через нечеткие замещения логических связок

Четкую импликацию формально можно выразить с помощью операций дизъюнкции, конъюнкции и отрицание следующими способами, каждый из которых имеет свою логическую интерпретацию:

1) $a \to b = \neg a \vee b$;

2) $a \to b = \neg a \vee (a \wedge b) = (\neg a \wedge \neg b) \vee b$ (применение закона Блейка — Порецкого к предыдущей формуле);

3) $a \to b = \max\{x \in \{0; 1\}: a \wedge x \leqslant b\}$.

В классической логике высказываний эти формулы эквивалентны. При переходе же в этих формулах от четких операций конъюнкции $\wedge$, дизъюнкции $\vee$ и отрицания $\neg$ к нечетким связкам (t-норме T, t-конорме S и инвертору N соответственно) мы получим три семейства неэквивалентных импликаций:

1) нечеткие импликации S-типа:

$$I_S = (a, b) = S(N(a), b);$$

2) нечеткие импликации QL-типа (Quantum Logic):

$$I_{QL}(a, b) = S(N(a), T(a, b)) = S(b, T(N(a), N(b)));$$

3) нечеткие импликации R-типа (Residuated):

$$I_R(a, b) = \sup\{x \in [0, 1]: T(a, x) \le b\}.$$

Примерами нечетких импликаций S-типа являются:

импликация Клини (Kleene, 1938) ISM(a, b) = max{1 – a; b} (здесь SM(x, y) = = max{x; y}, N(x) = 1 – x);

импликация Рейхенбаха (Reichenbach, 1935) ISP(a, b) = 1 – a + ab (здесь SP(x, y) = x + y – xy — вероятностная сумма, N(x) = 1 – x);

импликация Лукасевича (1920) ISL(a, b) = min{1; 1 – a + b} (здесь SL(x, y) = = min{x + y; 1} — сумма Лукасевича, N(x) = 1 – x);

наибольшая импликация S-типа &&&&&& (здесь

$$S_D(x, y) = \begin{cases} x, & y = 0, \\ y, & x = 0, \\ 1, & (x, y) \in (0; 1]^2 \end{cases}$$

— драстическая сумма).

Нетрудно показать, что ISM $\leqslant$ ISP $\leqslant$ ISL $\leqslant$ ISD.

Примерами нечетких импликаций QL-типа являются:

импликация Заде (1973) IQM(a, b) = max{1 – a; min{a; b}} (здесь TM(x, y) = = min{x; y}, S = SM(x, y) = max{x; y}, N(x) = 1 – x);

импликация (Klir, Yuan, 1994) IQP(a, b) = 1 – a + a2b (здесь TM(x, y) = min{x; y}, S = SM(x, y) = max{x; y}, N(x) = 1 – x);

импликация Клини IQL(a, b) = ISM(a, b) = max{1 – a; b} (здесь TL(x, y) = = max{x + y – 1; 0}, SL(x, y) = min{x + y; 1}, N(x) = 1 – x, т.е. импликация Клини является одновременно импликацией S- и QL-типа);

импликация (Klir, Yuan, 1994) $I_{QD}(a,b) = \begin{cases} b, & a = 1, \\ 1 - a, & a \neq 1, b \neq 1, \\ 1, & a \neq 1, b = 1 \end{cases}$

Примерами нечетких импликаций R-типа являются:

импликация Геделя (Gödel, 1976)

$$I_{RM}(a,b) = \sup\{x \in [0,1]; \min\{a;x\} \leq b\} = \begin{cases} 1, & a \leq b, \\ b, & a > b; \end{cases} \tag{1.1}$$

импликация Гогена (Goguene, 1969)

=======

Основным законом при поступательном движении является второй закон Ньютона, который записывается в форме a = Fрез/m. Используя найденные аналоги, можно сразу записать второй закон Ньютона в применении к движению вращательного твердого тела:

$$\varepsilon = \frac{M_{\text{рез}}}{J}; \quad M_{\text{рез}} = \sum_i M_i. \tag{2.31}$$

Эта формула и называется основным уравнением динамики вращательного движения.

Подставив в эту формулу числовые значения (напомним, что электрическая постоянная k = 9 · 109 Н · м2/Кл2, см. в гл. 1 формулу (1.19)), получим:

$$R = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{6{,}7 \cdot 10^{-27} \cdot \left(3 \cdot 10^7\right)^2} = \frac{10^{-29}}{10^{-13}} \approx 10^{-14} \text{ м.} \tag{2.40}$$

Отсюда следует, что весь положительный заряд должен быть сконцентрирован в очень малой части атома.

Вычисляя производные, запишем сразу вторую

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi) - B\omega^2\cos(\omega t + \varphi) \tag{1.54}$$

и подставим x и вторую производную в уравнение движения (1.48). Имеем:

$$\begin{aligned} &- A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi) - B\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = \\ &= -\omega_0^2\left[A\cos(\omega_0 t + \varphi) + B\cos(\omega t + \varphi)\right] + \frac{F_0}{m}\cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \tag{1.55}$$

После простых преобразований («уничтожаем и сокращаем») находим, что

$$B = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{1.56}$$

Амплитуда движений, возникающих под действием внешней периодической силы на гармонический осциллятор, зависит от частоты ω приложенной силы.

Вычисляем:

$$V = \frac{dx}{dt} = A\left[-\lambda e^{-\lambda t}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \omega_0 e^{-\lambda t}\sin(\omega_0 t + \varphi_0)\right]; \tag{1.60}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = A\Big[\lambda^2 e^{-\lambda t}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) + 2\lambda\omega_0 e^{-\lambda t}\sin(\omega_0 t + \varphi_0) - {} \\ -\omega_0{}^2 e^{-\lambda t}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\Big]. \tag{1.61}$$

Подставляя эти результаты в дифференциальное уравнение затухающих колебаний, сокращая амплитуду Ae–λt и приравнивая к нулю коэффициенты при синусе и косинусе (ведь тождество должно выполняться при любых временах t), получим:

$$m\left(\lambda^2 - \omega_0^2\right) - f\lambda + k = 0; \tag{1.62}$$

2mλω0 – fω0 = 0.

Разложение сложного колебания в ряд Фурье называется разложением в спектр. Результатом разложения в спектр являются амплитуды ak и bk, соответствующие частотам νk = kπx/l, где k = 1, 2, ... — целые натуральные числа. В курсе математики доказывается, что при 0 ⩽ x ⩽ l разложения имеют вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l}, \tag{1.66}$$

где

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}dx \tag{1.67}$$

или

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{1.68}$$

где

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cdot \sin\frac{k\pi x}{l}\,dx.$$

(1.69)

Графически спектр колебаний удобно представлять в виде дискретных, зависящих только от целых чисел, графиков зависимости амплитуды A от частоты νk.

Так как сила кулоновского взаимодействия Fэл = kQq/r2 направлена по прямой, соединяющей заряды, в данном случае по радиусу от центра, то работа на участках окружностей равна нулю, и можно записать:

$$A_{12} = \int_1^2 F_{эл}\cos\left(\vec{F}\wedge d\vec{s}\right)ds = -\int_{R_1}^{R_2}\frac{kQq}{r^2}dr = \\ = -kQq\int_{R_1}^{R_2} r^{-2}dr = kQq\left.\frac{1}{r}\right|_{R_1}^{R_2} = kQq\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right). \qquad (2.10)$$

Второе равенство в (2.10) отражает возможность учитывать перемещение только по радиусу.

Интересно вычислить потенциальную энергию на высоте h вблизи поверхности Земли. Расчет нужно вести, учитывая малость отношения h/R3, но не отбрасывая слагаемые с таким множителем совсем, а оставляя лишь слагаемые, линейные по h. Вычисляем:

$$\begin{aligned} W_{\text{п}} &= -\gamma m M_3 \frac{1-h/R_3}{R_3\left(1+h/R_3\right)\left(1-h/R_3\right)} = \\ &= \frac{\gamma m M_3}{R_3}\frac{1-h/R_3}{1-\left(h/R_3\right)^2} = \gamma\frac{mM_3}{R_3}\left(1-h/R_3\right) = \\ &= -\gamma\frac{mM_3}{R_3} + \gamma\frac{mM_3}{R_3^2}h = W_{\text{п}}\left(h=0\right) + mgh. \end{aligned} \qquad (2.16)$$

Хотя ход вычислений можно понять, глядя на формулы, дадим некоторые пояснения.

=====

Вычисляем:

$$V = \frac{dx}{dt} = A\left[-\lambda e^{-\lambda t}\cos(\omega_0 t+\varphi_0) - \omega_0 e^{-\lambda t}\sin(\omega_0 t+\varphi_0)\right];$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = A\left[\lambda^2 e^{-\lambda t}\cos(\omega_0 t+\varphi_0) + 2\lambda\omega_0 e^{-\lambda t}\sin(\omega_0 t+\varphi_0) - \right. \\ \left. -\omega_0{}^2 e^{-\lambda t}\cos(\omega_0 t+\varphi_0)\right].$$

$$V = \frac{dx}{dt} = A\left[-\lambda e^{-\lambda t}\cos(\omega_0 t+\varphi_0) - \omega_0 e^{-\lambda t}\sin(\omega_0 t+\varphi_0)\right];$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = A\left[\lambda^2 e^{-\lambda t}\cos(\omega_0 t+\varphi_0) + 2\lambda\omega_0 e^{-\lambda t}\sin(\omega_0 t+\varphi_0) - \right. \\ \left. -\omega_0{}^2 e^{-\lambda t}\cos(\omega_0 t+\varphi_0)\right].$$

$$V = \frac{dx}{dt} = A\left[-\lambda e^{-\lambda t}\cos(\omega_0 t+\varphi_0) - \omega_0 e^{-\lambda t}\sin(\omega_0 t+\varphi_0)\right];$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = A\left[\lambda^2 e^{-\lambda t}\cos(\omega_0 t+\varphi_0) + 2\lambda\omega_0 e^{-\lambda t}\sin(\omega_0 t+\varphi_0) - \right. \\ \left. -\omega_0{}^2 e^{-\lambda t}\cos(\omega_0 t+\varphi_0)\right].$$

Подставляя эти результаты в дифференциальное уравнение затухающих колебаний, сокращая амплитуду Ae–λt и приравнивая к нулю коэффициенты при синусе и косинусе (ведь тождество должно выполняться при любых временах t), получим: